Correction d'exercices du TD 1
Suites numériques

Exercice 14 : $u_n = \frac{1}{n} + e^{-n}$ pour $n \geq 1$.

1) On calcule, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + e^{-(n+1)} - \left(\frac{1}{n} + e^{-n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + e^{-(n+1)} - e^{-n}$$

$$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} + e^{-(n+1)} - e^{-n} = \underbrace{-\frac{1}{n(n+1)}}_{\leq 0 \text{ car } n \geq 0} + \underbrace{e^{-(n+1)} - e^{-n}}_{\leq 0 \text{ car } x \mapsto e^{-x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$$

ou (1) $\underbrace{e^{-n}}_{\geq 0}\underbrace{(e^{-1}-1)}_{\leq 0}$

(donc $n \leq n+1 \Rightarrow e^{-n} \geq e^{-(n+1)}$)

donc $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$

i.e. $\boxed{(u_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

2) Comme $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est majorée par u_1.

(puisque $\forall n \geq 1$, $u_n \leq u_1$).

Il reste à montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée.

Or $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et $e^{-n} \geq 0$ donc $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 0$, ie $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ minorée par 0

Donc $\boxed{(u_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$

Exercice 15 : pour $n \geq 1$, $u_n = n\pi + \frac{1}{n}$

1) $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée car elle n'est pas minorée :

en effet, comme pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \geq 0$ alors $\forall n \geq 1$, $u_n \geq n\pi$ et $\lim_{n \to +\infty} n\pi = +\infty$

2) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente car elle n'est pas bornée.

3) On considère la suite définie par $v_n = \sin(u_n)$.

Comme $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ on en déduit, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\pi + a) = (-1)^n \sin(a)$

Donc pour $n \geq 1$, $\sin(u_n) = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $x \mapsto \sin(x)$ est continue en 0 alors

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$

Exercice 10 :

1) $$u_n = \frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4} = \frac{4n^5}{6n^7\left(1 - \frac{5}{6}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6n^5} - \frac{4}{6n^7}\right)} = \underbrace{\frac{4}{6n^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \times \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{5}{6n^2} + \frac{1}{6n^5} + \frac{4}{6n^7}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

donc $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} \frac{4n^5}{6n^7} = \lim_{+\infty} \frac{4}{6n^2} \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} u_n = 0}$

2) $$u_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1) - (n-1)(n^2-2n-1)}{n^2+1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\cancel{n^3} + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - [\cancel{n^3} - 2n^2 - n - n^2 + 2n + 1]}{n^2+1} = \frac{6n^2 + 4n}{n^2+1}$$

donc $\boxed{\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} \frac{6n^2}{n^2} = 6}$

3) $$u_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+2} - n)} = \frac{\sqrt{n^2+2} + n}{n(\sqrt{n^2+2} - n)(\sqrt{n^2+2} + n)} = \frac{\sqrt{n^2+2} + n}{n(n^2+2-n^2)} = \frac{n + \sqrt{n^2+2}}{2n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n + n\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2n} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2}$$

. Comme $\lim_{+\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = 0$, on a

$$\boxed{\lim_{+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

4) $u_n = (-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ mais $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin(\pi) = 0$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \ldots$

donc pour $n = 2p$, $u_{2p} = 1 \times 0 = 0$ et pour $n = 2p+1$, $u_{2p+1} = -(-1)^p$

Comme la suite extraite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est divergente, $\boxed{(u_n)_{\mathbb{N}} \text{ est divergente}}$

5) $u_n = \dfrac{2n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n} = \left(2n - \sqrt{n^2-1}\right) \times \dfrac{\sqrt{n^2+3} + n}{(\sqrt{n^2+3} - n)(\sqrt{n^2+3} + n)} = \dfrac{n\left(2 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \times \left(n + \sqrt{n^2+3}\right)}{n^2+3-n^2}$ 3

$\Rightarrow u_n = \dfrac{n\left(n + \sqrt{n^2+3}\right)\left(2 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{3}$ mais $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty}\left(2 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{+\infty} n\left(n + \sqrt{n^2+3}\right)\left(2 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty.}$

6) $u_n = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$ mais $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(n)} = e^0 = 1$

ie $\boxed{\lim u_n = 1}$ (car $x \mapsto e^x$ continue en 0)

7) $a_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \dfrac{3^n\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}$ comme $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $(*)$, on en

déduit que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} a_n = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = 1}$

Démontrons $(*)$: $\left(\frac{2}{3}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ or $\frac{2}{3} < 1$ donc $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

donc $e^{n\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

8) $b_n = \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) \times \dfrac{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{n^2+n+1 - (n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}$

$\Rightarrow b_n = \dfrac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ ie $\boxed{\lim\limits_{+\infty} b_n = 2.}$

9) $c_n = \dfrac{e^n}{n^n} = \dfrac{e^n}{e^{n\ln(n)}} = e^{n - n\ln(n)} = e^{n(1-\ln(n))}$

Comme $\lim\limits_{+\infty} 1 - \ln(n) = -\infty$, on a $\lim\limits_{+\infty} n(1-\ln(n)) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} c_n = 0.}$

10) $d_n = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2n^2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} d_n = \frac{1}{2}.}$

11) $p_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right)$

Calculons $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ (si elle existe).

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$. f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

Comme pour $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, on en déduit que $f'(0) = 1$.

Maintenant, $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$,

donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1.}$

12) $q_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$ (question du DM)

13) $r_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$, on a $\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \leq \frac{n+1}{n-1}$.

On a $\lim\limits_{+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$, donc par le théorème d'encadrement,

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} r_n = 1.}$

14) $s_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$. On a $-\frac{1}{n+(-1)^{n+1}} \leq s_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+(-1)^{n+1}}$

Mais $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n+(-1)^{n+1}} = 0$ (car $\lim\limits_{+\infty} n+(-1)^{n+1} = +\infty$), donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} s_n = 0}$

15) $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$ (question du DM)

Exercice 10 (suite et fin) : 16) $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{k}$.

Il s'agit d'une moyenne de Cesaro (voir exercice 23)

$a_k = \cos(k) \times \frac{1}{k}$ alors $v_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

Comme $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$ (puisque $0 \leq |a_k| = \frac{|\cos(k)|}{k} \leq \frac{1}{k}$ et $\lim_{+\infty} \frac{1}{k} = 0$),

on en déduit que $\boxed{\lim_{+\infty} v_n = 0.}$ (question 2) de l'exercice 23)

17) $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Idem, il s'agit d'une moyenne de Cesaro

avec $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ et $w_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

On a vu dans l'exemple 11) que $\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e^1$, donc $\boxed{\lim_{+\infty} w_n = e^1.}$

Exercice 27. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}$ pour $n \geq 1$.

1) Soit $n \geq 1$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1}$

On veut minorer $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1}$. On note $u_k = \frac{k}{k^2+1}$.

On étudie le sens de variation de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$.
Considérons la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Alors f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a pour $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow \forall x \geq 1$, $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$. Comme $\forall x \geq 1$, $1 - x^2 \leq 0$, on en déduit

que $\forall x \geq 1$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
Donc la suite $(u_k)_{k \geq 1}$, où $u_k = f(k)$, est décroissante.

La somme $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1}$ est une somme de termes <u>positifs</u> dont le

terme général $u_k = \frac{k}{k^2+1}$ est décroissant donc $S_{2n}-S_n$ est plus grande que n fois le plus petit terme de cette somme :
la somme

(nb de termes de la somme $S_{2n}-S_n$)

$$S_{2n}-S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \geqslant n \times \frac{2n}{(2n)^2+1} = \frac{2n^2}{4n^2+1}$$

. Reste à montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \frac{2n^2}{4n^2+1} \geqslant \frac{1}{4}$

On considère maintenant la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par

$g(x) = \frac{2x^2}{4x^2+1}$. g est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a

$$\forall x \geqslant 1,\ g'(x) = \frac{4x(4x^2+1)-(2x^2)\times(8x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{4x}{(4x^2+1)^2} \geqslant 0 \quad (\text{car } x \geqslant 1)$$

Donc g est croissante et en particulier la suite définie par $w_n = \frac{2n^2}{4n^2+1}$ est croissante. On en déduit que $g(1) \leq g(n)$ pour $n \geqslant 1$

c'est-à-dire $g(1) = \frac{2}{5} \leq \frac{2n^2}{4n^2+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Comme $\frac{2}{5} \geqslant \frac{1}{4}$ (car $\frac{8}{5} \geqslant 1$), on en déduit que $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_{2n}-S_n \geqslant \frac{2}{5} \geqslant \frac{1}{4}.}$

2) La question 1) nous dit que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy (on le montrera après). On en déduit que (S_n) est divergente. Il reste à montrer que $\lim_{+\infty} S_n = +\infty$ et pour cela, il suffit de montrer que (S_n) est croissante.

Tout d'abord $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy. On raisonne par l'absurde :

En effet, si $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy alors, par définition,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$ et $\forall m \geqslant N$, $|S_m - S_n| \leqslant \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$ et $\forall m \geqslant N$, $|S_m - S_n| \leq \frac{1}{8}$

On prend $m = 2n \geqslant n \geqslant N$, ce qui donne $|S_{2n} - S_n| \leq \frac{1}{8}$

Contradiction avec la question 1).

Donc $\underline{(S_n) \text{ n'est pas de Cauchy}}$. (donc (S_n) n'est pas convergente)

Montrons que (S_n) est croissante. C'est évident car

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \geq 0 .$$ Donc $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante.

On en déduit que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante non majorée (puisqu'elle ne converge pas) donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$

Autre façon de montrer que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas, raisonnons par l'absurde :

Si $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors la suite extraite $(S_{2n})_{\mathbb{N}}$ converge aussi vers l. Par somme, la suite $(S_n - S_{2n})_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On montre maintenant qu'il y a une contradiction avec la question 1)

Puisque $(S_n - S_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|S_n - S_{2n}| \leq \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $S_{2n} - S_n \leq \frac{1}{8}$

contradiction avec 1). Donc $(S_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas et donc n'est pas bornée.

Exercice 28 : 1) On raisonne par récurrence :

Pour $n=0$, $u_0 \in]0;1]$, ie $0 < u_0 \leq 1$.

On suppose que $0 < u_n \leq 1$. $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$

Alors $0 < \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{2}$ et $0 < u_n^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{u_n^2}{4} \leq \frac{1}{4}$.

Par somme $0 < \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$ ie $0 < u_{n+1} \leq 1$.

Par récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{4} + \frac{u_n}{2} - u_n = \left(\frac{u_n}{2}\right)^2 - \frac{u_n}{2} = \left(\frac{u_n}{2}\right)\left(\frac{u_n}{2} - 1\right)$

Or $0 < \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{2}$ et $-1 < \frac{u_n}{2} - 1 \leq -\frac{1}{2}$ d'après la question 1)

donc $u_{n+1} - u_n = \underbrace{\left(\frac{u_n}{2}\right)}_{\geq 0} \times \underbrace{\left(\frac{u_n}{2} - 1\right)}_{\leq 0} \leq 0$ ie $u_{n+1} \leq u_n$ donc $\boxed{(u_n)_{\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

3) D'après la question 2) la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

D'après la question 1) (et un résultat du cours), $l \in [0; 1]$.

Donc $(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in [0;1]$.

La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ donc elle est aussi convergente et converge vers ℓ.

Donc $\lim u_{n+1} = \lim \left(\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \right) = \lim \frac{u_n}{2} + \lim \frac{u_n^2}{4}$

$\Rightarrow \quad \ell = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2}{4} \quad \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell}{2} = 0 \quad \rightarrow \frac{\ell}{2}\left(\frac{\ell}{2} - 1\right) = 0$

Donc $\frac{\ell}{2} = 0$ ou $\frac{\ell}{2} - 1 = 0$ ie $\ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Comme $\ell \in [0;1]$, on en déduit que $\boxed{\text{la limite de } (u_n)_{\mathbb{N}} \text{ est } 0.}$