Correction Devoir Maison 1

Exercice 1 : Remarque : dans l'énoncé, dans la définition de la suite, il faut lire $n \geq 0$.

1) Tout d'abord, on montre que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien définie : pour cela, on vérifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$. Ceci se vérifie par une récurrence immédiate : $u_0 > 0$ par hypothèse. On suppose que $u_n \neq 0$ au rang n, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \neq 0$. Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(u_n^2 + 2a + \dfrac{a^2}{u_n^2}\right) - a = \dfrac{u_n^4 + 2au_n^2 + a^2}{4u_n^2} - \dfrac{4au_n^2}{4u_n^2}$, d'où $\boxed{u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.}$

2) D'après 1), pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 \geq a$. Par la même récurrence qu'en question 1), on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{a}$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{a}.}$

Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{a}{2u_n} - \dfrac{u_n}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \leq 0 &\iff \frac{a}{2u_n} - \frac{u_n}{2} \leq 0 \iff \frac{a}{2} \leq \frac{u_n^2}{2} \text{ (car } u_n > 0) \\ &\iff a \leq u_n^2 \iff \sqrt{a} \leq u_n \text{ (car } u_n > 0). \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{a}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1. **NB** : on n'a pas dit dans l'énoncé que $u_0 \geq \sqrt{a}$! !

3) D'après la question 2), $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite l vérifie $l \geq \sqrt{a}$. Puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente alors la suite extraite $(u_{n+1})_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers la même limite l, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n \to +\infty}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \iff l = \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a}{l}\right) \iff \dfrac{l}{2} = \dfrac{a}{2l}$, d'où $l^2 = a$, i.e. $l = \pm\sqrt{a}$. Mais $l \geq \sqrt{a}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}.}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$. D'une part, comme $u_n \geq \sqrt{a}$, on a $(u_{n+1} + \sqrt{a}) \geq 2\sqrt{a}$, donc

$$u_{n+1}^2 - a \geq 2\sqrt{a}(u_{n+1} - \sqrt{a}). \quad (1)$$

D'autre part, $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2} = \dfrac{1}{4}(u_n - \sqrt{a})^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2$. Comme $u_n \geq \sqrt{a}$, on a $\dfrac{\sqrt{a}}{u_n} \leq 1$, d'où $\left(1 + \dfrac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leq 4$ donc

$$u_{n+1}^2 - a \leq (u_n - \sqrt{a})^2. \quad (2)$$

En combinant (1) et (2) on obtient, pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.}$

5) On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ par hypothèse, c'est bon. On suppose la propriété vraie au rang n, alors d'après la question précédente puis par hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2,$$

d'où $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$. Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.}$

6) Ici, $u_0 = 3$ et $a = 10$. On veut approcher $\sqrt{10}$ (donc on ne calcule pas avec !) . On cherche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - \sqrt{10} < 10^{-8}$, et pour cela, on cherche n tel que $2\sqrt{10}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{10}}\right)^{2^{n-1}} < 10^{-8}$ $(\star)$. On détermine d'abord une valeur pour k : Comme $3^2 = 9 \leq 10$, on a $3 \leq \sqrt{10}$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leq u_1 - 3 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) - 3 = \frac{1}{6}$. On prend $k = \frac{1}{6}$.

Revenons à $(\star)$, on cherche n tel que $\dfrac{\sqrt{10}}{6^{2^{n-1}} 2^{2^{n-1}-1} 10^{2^{n-2}}} < 10^{-8}$. Comme on ne connait pas $\sqrt{10}$, on le majore par 4 (puisque $4^2 \geq 10$). On en vient à chercher le plus petit n tel que $\dfrac{4}{6^{2^{n-1}} 2^{2^{n-1}-1} 10^{2^{n-2}}} < 10^{-8}$. Pour $n = 2$, on a

$\frac{4}{6^2\times 2} \approx 5,56.10^{-2}$. Pour $n=3$, on a $\frac{4}{6^4\times 2^3\times 10} \approx 3,86.10^{-5}$. Pour $n=4$, on a $\frac{4}{6^8\times 2^7\times 10^2} \approx 1,86.10^{-10}$. On calcule u_4 par récurrence : on trouve $u_4 = 3,1622776601$. Les 8 premiers chiffres après la virgule sont corrects (et même les 9 d'après notre calcul). Avec un algorithme, on écrit (en syntaxe Scilab) –>format(16) –>u=3 –>for i=1 :5 do –>u=(u+a/u)/2 –>end ; Conclusion : $\boxed{\sqrt{10} = 3,16227766.10^{-8}.}$

Exercice 2 :

1) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^3+1}$. Pour $n \geq 1$, $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+1}$. On note $u_k = \dfrac{k^2}{k^3+1}$ pour $k \geq 1$.

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$. f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a, pour $x \geq 1$, $f'(x) = \dfrac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$. Donc, pour $x \geq 2$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$. On en déduit que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir de $n=2$. Comme $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{4}{9}$, on a aussi $u_1 \leq u_2$, donc la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante. (à partir du rang 2 suffit...)

La somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+1}$ est une somme de termes positifs dont le terme général est décroissant, donc elle est minorée par n fois le plus petit terme (n=nombre de termes de la somme). C'est-à-dire, pour $n \geq 1$,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+1} \geq n \cdot \frac{(2n)^2}{(2n)^3+1} = \frac{4n^3}{8n^3+1}.$$

On note $v_n = \dfrac{4n^3}{8n^3+1}$ pour $n \geq 1$. On va montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{10}$.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x^3}{8x^3+1}$. g est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a, pour $x \geq 1$, $g'(x) = \dfrac{12x^2(8x^3+1) - 4x^3(24x^2)}{(8x^3+1)^2} = \dfrac{12x^2}{(8x^3+1)^2}$. Donc $\forall x \geq 1, g'(x) \geq 0$, donc la fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$, par conséquent, la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et donc elle est minorée par $v_1 = \frac{4}{9}$. Comme $\frac{4}{9} \geq \frac{1}{10}$, on en déduit que $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{10}$ et donc $\boxed{\forall n \geq 1, S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{10}. \quad (\star)}$

2) On va montrer que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

• Montrons que (S_n) est croissante : soit $n \geq 1$, alors $S_{n+1} - S_n = \dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)^3+1} \geq 0$, donc <u>la suite (S_n) est croissante.</u>

• Montrons que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente.

Première méthode : Supposons que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. En particulier, la suite extraite $(S_{2n})_{\mathbb{N}^*}$ converge vers l aussi. Donc, par somme, la suite définie par $S_{2n} - S_n$ converge vers 0. Par définition, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |S_{2n} - S_n| \leq \varepsilon$. C'est en particulier vrai pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$. Mais dans ce cas, il y a une contradiction avec $(\star)$. Donc <u>la suite $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est divergente.</u>

Deuxième méthode : on montre que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy. Supposons que (S_n) est de Cauchy, alors par définition $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |S_m - S_n| \leq \varepsilon$. En prenant $m = 2n$ et $\varepsilon = \frac{1}{20}$, on aboutit à une contradiction avec $(\star)$.

On en déduit que $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante, non majorée, donc $\boxed{(S_n)_{\mathbb{N}^*} \text{ tend vers } +\infty.}$

Exercice 3 : Voir la feuille de correction de l'exercice 10 du TD 1 sur les suites. Ici, on donne les réponses avec indication.

Pour (a_n), on factorise le numérateur et le dénominateur par 4^n. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1.}$ Pour (b_n), on factorise le numérateur et le dénominateur par n. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.}$ Pour (c_n), on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1.}$ Pour (p_n), on écrit $p_n = \exp(n\ln(1+\frac{2}{n}))$, puis on calcule la limite de $n\ln(1+\frac{2}{n})$ en utilisant la définition de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+2x)$ en 0. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^2.}$ Pour (q_n), on utilise $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0.}$ Pour (r_n), on factorise le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n}$. On trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1.}$ Pour (U_n) et (V_n), il s'agit d'appliquer la moyenne de Cesaro (exercice 23 du TD 1). On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{k\to+\infty} \exp\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right) = e^0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1,}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{k\to+\infty} p_k = e^2.}$