Université de Bordeaux Année 2013-2014
M1MI2011 Analyse 1 Groupe A1

Devoir 1

à rendre mercredi 5 mars 2014

NB : Les réponses doivent être justifiées.

- **Exercice 1.** Soit $a > 0$ et soit $(u_n)_n \geq 1$ la suite de nombres réels définie par $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big), \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{a}$ et que la suite est décroissante.
3. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$, montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\Big(\frac{k}{2\sqrt{a}}\Big)^{2^{n-1}}.$$
6. Application: calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgules, en prenant $u_0 = 3$.

- **Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^3+1}.$$

1. Montrer pour tout $n \geq 1$ on a $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{10}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

- **Exercice 3.** Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes :

$$a_n = \frac{4^n - (-2)^n}{4^n + (-2)^n}, \quad b_n = \frac{n - \sqrt{2n^2+1}}{n + \sqrt{2n^2-1}}, \quad c_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k,$$

$$p_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad q_n = \frac{\cos n}{n + (-1)^{n+1}}, \quad r_n = \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln k}{k}}, \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{2}{k}\Big)^k.$$