MISMI Semestre 2, Année 2013-2014

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir surveillé 1

Date : 17 Mars 2013 Durée : 1h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Question de cours

1. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Expliciter avec des quantificateurs ce que signifie le fait qu'une fonction $f\ : I \to \mathbb{C}$ soit uniformément continue sur I.* Il s'agit de la définition 2.9 du cours, s'exprimant ainsi en termes de quantificateurs :
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta = \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que}$$
$$\forall\, x, y \in I,\ (|x - y| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

2. *Pour quels sous-ensembles I de $\mathbb{R}$ peut-on affirmer que toute fonction $f\ : I \to \mathbb{C}$ continue sur I est uniformément continue sur cet ensemble ?* C'est au théorème de Heine (théorème 2.3 du cours) qu'il fallait faire référence ici : dès que le sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est supposé fermé et borné (c'est-à-dire compact), toute fonction continue de I dans $\mathbb{C}$ est automatiquement uniformément continue sur I. Un exemple important est celui où I est un segment $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 1.

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par la condition initiale $v_1 = 1$ et la relation de récurrence
$$v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

1. *Montrer que les deux suites $(v_{2k})_{k\geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k\geq 1}$ sont des suites adjacentes.* On a
$$v_{2(k+1)} - v_{2k} = (v_{2(k+1)} - v_{2k+1}) + (v_{2k+1} - v_{2k}) =$$
$$= \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)+1} + \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} = -\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k+1} \geq 0 \qquad \forall\, k \geq 1.$$
La suite $(v_{2k})_{k\geq 1}$ est donc croissante. De même
$$v_{2(k+1)+1} - v_{2k+1} = (v_{2(k+1)+1} - v_{2(k+1)}) + (v_{2(k+1)} - v_{2k+1}) =$$
$$= \frac{(-1)^{2(k+1)}}{2(k+1)+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2k+3)} - \frac{1}{2k+1} \leq 0 \qquad \forall\, k \geq 1.$$

La suite $(v_{2k+1})_{k\geq 1}$ est donc décroissante. On a enfin

$$|v_{2k+1} - v_{2k}| = \Big|\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}\Big| = \frac{1}{2k+1}$$

et la suite $(v_{2k+1} - v_{2k})_{k\geq 1}$ converge donc (comme c'est le cas pour la suite $(1/(2k+1))_{k\geq 1}$) vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On a donc

$$\begin{aligned} & v_{2k} \leq v_{2(k+1)} \leq v_{2k+3} \leq v_{2k+1} \quad \forall\, k \geq 1 \\ & \lim_{k\to+\infty} (v_{2k+1} - v_{2k}) = 0. \end{aligned}$$

Ce sont là exactement les conditions (1.10) de la définition 1.8 du cours (suites adjacentes). Les deux suites $(v_{2k})_{k\geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k\geq 1}$ sont donc bien adjacentes.

2. *En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ.* On invoque le critère de convergence des suites adjacentes (proposition 1.6 du cours) : les deux suites $(v_{2k})_{k\geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k\geq 1}$ sont convergentes vers la même limite ℓ. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge donc vers la limite commune de ces deux sous-suites (dont les termes s'intercalent pour former précisément la suite $(v_n)_{n\geq 1}$), c'est-à-dire ℓ.

3. *Justifier en calculant les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ (on précisera combien sont nécessaires) que ℓ est un nombre compris entre 0 et 1 et dont la première décimale est dans l'ensemble $\{5, 6, 7\}$.* On observe (en utilisant si nécessaire la calculette) que

$$\begin{aligned} & v_1 = 1,\ v_2 = \frac{1}{2} = 0.5,\ v_3 = \frac{5}{6} \simeq 0.833, \\ & v_4 = \frac{7}{12} \simeq 0.583,\ v_5 = \frac{47}{60} \simeq 0.783. \end{aligned}$$

Comme

$$v_2 \leq v_4 \leq \ell \leq v_5 \leq v_3 \leq v_1$$

du fait de l'adjacence des des deux suites (et puisque la suite $(v_{2k})_{k\geq 1}$ est croissante tandis que la suite $(v_{2k+1})_{k\geq 1}$ est décroissante), le nombre ℓ appartient au segment $[v_4, v_5] = [7/12, 47/60] \subset [0.58, 0.79]$ et sa première décimale appartient nécessairement à l'ensemble $\{5, 6, 7\}$. On utilise ici l'assertion concernant les DDI dans l'énoncé de la proposition 1.6. Il fallait calculer les cinq premiers termes de la suite pour valider le résultat demandé.

Exercice 2.

1. *Expliciter ce que signifie le fait qu'une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes soit une suite de Cauchy. Que peut-on dire du comportement d'une suite de Cauchy $(u_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes lorsque k tend vers l'infini ?* Une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy (1.15) de la définition 1.16 du cours :
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}^*,\ (k \geq K \text{ et } k' \geq K) \Longrightarrow (|u_k - u_{k'}| \leq \epsilon).$$
Le théorème 1.3 du cours assure que toute suite de Cauchy $(u_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes est nécessairement convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque k tend vers l'infini.

2. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a*
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
Si $k \geq 2$, on a $k \geq k-1$ et par conséquent $1/k^2 \leq 1/(k(k-1))$. L'égalité $1/k^2 = 1/(k-1) - 1/k$ (pour $k \geq 2$) s'obtient en réduisant le second membre au même dénominateur.

3. *Déduire de la question **2** que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
est une suite qui converge vers une limite $\ell \in [1,2]$. On a, pour tout $n \geq 2$,
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big)$$
en appliquant à chaque terme de la somme l'inégalité établie à la question **2**. Mais on a, pour tout $n \geq 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = 1 - \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots$$
$$\cdots + \Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\Big) + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 1 - \frac{1}{n}.$$
(la somme se trouve être « télescopique », les termes se détruisant au fur et à mesure qu'on les ajoute). La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite croissante de nombres réels ($S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)^2 \geq 0$) minorée par

$S_1 = 1$ et majorée par 2 car $S_n \leq 1 + (1 - 1/n) = 2 - 1/n$ pour tout $n \geq 2$. D'après la proposition 1.2 du cours la suite croissante majorée de nombres réels $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers une limite ℓ. Comme $S_n \in [1,2]$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $\ell \in [1,2]$ par passage à la limite.

4. *Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Vérifier que, si n et p sont deux entiers strictement positifs tels que $n > p > 1$, on a

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_{p+1} - u_p| \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} = S_{n-1} - S_{p-1}.$$

La première inégalité à établir résulte de l'inégalité triangulaire (inégalité (1.13) du cours) : si $z_1, ..., z_{n-p}$ sont $n-p$ nombres complexes, on a

$$|z_1 + \cdots + z_{n-p}| \leq |z_1| + \cdots + |z_{n-p}|.$$

Pour la seconde inégalité, il suffit d'ajouter les inégalités

$$|u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{k^2}, \quad k = p, ..., n-1.$$

La dernière égalité résulte de la définition même de $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2$ et $S_{p-1} = \sum_{k=1}^{k=p-1} 1/k^2$.

5. *Déduire des résultats établis aux deux questions précédentes que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente.* Toute suite convergente est de Cauchy (exemple 1.10 du cours). La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy. Si $\epsilon > 0$ est donné, il existe donc $K(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que dès que $n > p \geq K(\epsilon) + 1$, on a $|S_{n-1} - S_{p-1}| \leq \epsilon$ (on applique le critère de Cauchy rappelé à la question **1**). On a donc

$$(n > p \geq K(\epsilon) + 1) \Longrightarrow (|u_n - u_p| \leq \epsilon).$$

La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ vérifie donc aussi le critère de Cauchy et est par conséquent convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. (sur 7 points) *Soit $[a,b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$.*

1. *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un nombre $\ell \in [a,b]$ tel que $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire que f*

admet au moins un point fixe. Cette question reprend (avec le segment $[0,1]$ remplacé ici par le segment $[a,b]$) l'exemple 2.5 du cours. Soit $F : x \in [a,b] \mapsto f(x) - x$. On a $F(a) \geq 0$ et $F(b) \leq 0$ puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent tous deux au segment $[a,b]$. Si $F(a)F(b) = 0$, f admet a ou b comme point fixe ; si $F(a)F(b) \neq 0$, on a nécessairement $F(a)F(b) < 0$ et le TVI (théorème 2.1 du cours) assure, puisque F est continue sur $[a,b]$, que F s'annule au moins en un point ℓ de $]a,b[$, ce qui signifie que f présente un point fixe en ce point ℓ.

2. *On suppose de plus à partir de maintenant que f vérifie la condition*[1]

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, y \in [a,b], \quad (x = y) \text{ ou } (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

   Montrer que le nombre $\ell \in [a,b]$ introduit à la question **1** *est unique.* Si l'on avait deux nombres ℓ_1 et ℓ_2 de $[a,b]$ distincts tels que $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$, on aurait $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde.

3. *Soit $x \in [a,b]$. Montrer que l'on a aussi $(x + f(x))/2 \in [a,b]$.* Les nombres x et $f(x)$ sont dans $[a,b]$, donc le milieu du segment qu'ils bornent l'est aussi puisque $[a,b]$ est un segment. Or $(x + f(x))/2$ est précisément le milieu de ce segment.

4. *On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \alpha \in [a,b]$ et la relation de récurrence :*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + f(u_n)\Big).$$

   – *Justifier (en utilisant le résultat établi à la question* **3***) pourquoi la définition de cette suite est licite.* Ceci se justifie par récurrence. En fait, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la définition de $u_0, ..., u_n$ est licite et que tous ces nombres sont dans $[a,b]$. La définition de u_0 ne pose pas de problème. Si l'on a pu définir $u_0, ..., u_n$ en respectant le fait que tous les u_k, $k = 0, ..., n$, soient dans $[a,b]$, la définition de $u_{n+1} = (u_n + f(u_n))/2$ est licite puisque $f(u_n)$ est bien défini (car $u_n \in [a,b]$ et que $f : [a,b] \to [a,b]$). D'autre part $u_{n+1} \in [a,b]$ d'après le résultat établi à la question **3**. Ainsi la définition de $u_0, ..., u_{n+1}$ est licite et tous ces nombres sont dans $[a,b]$. Ce que l'on voulait prouver est bien ainsi prouvé par récurrence.

   – *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.* On a, pour

1. Il y avait un petit problème ici car le cas $x = y$ devait être considéré à part. L'énoncé a donc été légèrement modifié. Il en sera bien sûr tenu compte lors de la correction.

tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - u_{n-1}) + f(u_n) - f(u_{n-1})}{2}. \qquad (*)$$

Comme $|f(u_n) - f(u_{n-1}| < |u_n - u_{n-1}|$, les deux nombres $u_n - u_{n-1}$ et

$$(u_n - u_{n-1}) + (f(u_n) - f(u_{n-1}) = (u_n - u_{n-1}) - (f(u_{n-1}) - f(u_n))$$

ont même signe. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc d'après $(*)$ le même que celui de $u_n - u_{n-1}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc bien monotone (croissante ou décroissante).

– *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.* La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite monotone (donc croissante ou décroissante) de nombres réels tous dans un même segment $[a,b]$. Cette suite est donc à la fois majorée et minorée. Elle converge d'après la proposition 1.2 du cours vers une limite ℓ'. Comme f est continue, la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(\ell')$ et on a, par passage à la limite dans la relation inductive

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + f(u_n)),$$

$\ell' = (\ell' + f(\ell'))/2$, soit $f(\ell') = \ell'$. Le nombre ℓ' est donc un point fixe de f. Comme un tel point fixe est unique et égal à ℓ (d'après la question **2**), on a $\ell' = \ell$.