MISMI Semestre 2, Année 2013-2014

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir surveillé 1

Date : 17 Mars 2013, Durée : 1h30

Les trois exercices et la question de cours sont indépendants.

Question de cours

1. Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Expliciter avec des quantificateurs ce que signifie le fait qu'une fonction $f \ : I \to \mathbb{C}$ soit uniformément continue sur I.
2. Pour quels sous-ensembles I de $\mathbb{R}$ peut-on affirmer que toute fonction $f \ : I \to \mathbb{C}$ continue sur I est uniformément continue sur cet ensemble ?
3. Donner un exemple de fonction $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément continue.

Exercice 1.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la condition initiale $u_1 = 1$ et la relation de récurence

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant l'inégalité suivante (que l'on admettra sans chercher à la justifier) :

$$\frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $+\infty$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par la condition initiale $v_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que les deux suites $(v_{2(k+1)})_{k\geq 0}$ et $(v_{2k+1})_{k\geq 0}$ sont des suites adjacentes. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ. Justifier en calculant les sept premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ que ℓ est un nombre compris entre 0 et 1 et dont la première décimale est 6 ou 7.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. Déduire de la question **1** que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
est une suite qui converge vers une limite $\ell \in [1, 2]$.
3. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{k^2}.$$
Vérifier que, si n et p sont deux entiers strictement positifs tels que $n > p > 1$, on a
$$|u_n - u_p| \leq |u_n - u_{n-1}| + \ldots + |u_{p+1} - u_p| \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} = S_{n-1} - S_{p-1}.$$
4. Déduire des résultats établis aux deux questions précédentes que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente.

Exercice 3. Soit $[a, b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un nombre $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire que f admet au moins un point fixe.
2. On suppose de plus à partir de maintenant que f vérifie la condition
$$\forall\, x \in [a, b], \ \forall\, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$
Montrer que le nombre $\ell \in [a, b]$ introduit à la question **1** est unique.
3. Soit $x \in [a, b]$. Montrer que l'on a aussi $(x + f(x))/2 \in [a, b]$.
4. On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \alpha \in [a, b]$ et la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + f(u_n)\Big).$$
   – Justifier (en utilisant le résultat établi à la question **3**) pourquoi la définition de cette suite est licite.
   – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
   – Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f.