MISMI Semestre 2, Année 2013-2014

**UE M1MI2011** : ANALYSE 1 - Devoir surveillé 2

Date : 28 Avril 2014 Durée : 1h30

*Texte (en italiques)* et corrigé (en roman)

## Exercice I

1. *Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.*

   Il s'agit du théorème 2.1 du polycopié : « *soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $a, b$ deux éléments de $I$ tels que $a < b$ ; si $f$ est une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$, le segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ reste entièrement dans $f(I)$ (et même dans $f([a, b])$* ». On pouvait aussi se contenter d'en énoncer ici le corollaire (corollaire 2.1 du polycopié) : « *l'image d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle continue sur $I$ est encore un intervalle* ».

2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.*

   Il résulte du fait que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) \leq -1$ dès que $x < -A$ ; il résulte de même du fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ qu'il existe $B > 0$ tel que $f(x) \geq 1$ dès que $x > B$. Il existe donc $a < -A$ tel que $f(a) \leq -1$ et $b > B$ tel que $f(b) \geq 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f$ prend sur $[a, b]$ toute valeur comprise (au sens large) entre $f(a)$ et $f(b)$, donc en particulier toute valeur appartenant au segment $[-1, 1]$, notamment la valeur 0. Il existe donc au moins un point $x_0 \in ]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme à la question 2. Étant donnés $a < 0$ tel que $f(a) < 0$ et $b > 0$ tel que $f(b) > 0$, décrire un procédé algorithmique (initié à partir de $a$, $b$ et reposant sur la connaissance de $f$) permettant le calcul approché d'un nombre $x_0 \in ]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*

   La méthode algorithmique permettant de déterminer $x_0$ de manière approchée est la *méthode de dichotomie*, basée sur le code suivant (`N` désignant le nombre d'itérations)

```
function x=dichot(a,b,N);
x1= a ;
x2= b;
for i=1:N
   y=(x1+x2)/2;
   u=F(x1)*F(y);
```

```
    if u <= 0
    x1=x1;
    x2=y;
    else
        x1=y;
        x2=x2;
    end
end
x=x2
```

4. *Soit $P$ la fonction polynomiale*

$$P\ : x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) := x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 - x - 4.$$

*Montrer que la fonction $P$ s'annule en au moins un point $x_0$ de $\mathbb{R}$.*

La fonction $P$ est une fonction polynomiale de degré impair (en l'occurrence ici 5), dont le coefficient du monôme de plus haut degré est strictement positif (ici égal à 1). Donc $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^5) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^5) = +\infty$. Le fait que la fonction $P$ s'annule en au moins un point $x_0$ de $\mathbb{R}$ est une conséquence du résultat établi à la question **2**.

### Exercice II

1. *Énoncer la règle de l'Hôpital*

Il s'agit de la proposition 2.10 du polycopié : « *soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles continues sur $[a, b]$, toutes deux dérivables sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $g'$ ne s'annule pas au voisinage (épointé) de $x_0$ ; si la limite, lorsque $x$ tend vers $x_0$, de $f'(x)/g'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, cette limite $\ell$ est aussi la limite lorsque $x$ tend vers $x_0$ de la forme a priori indéterminée $f(x)/g(x)$* »

2. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}\Big) \qquad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{x-\sin x}{1-\cos x}\Big).$$

D'après la règle de l'Hôpital rappelée à la question **1**, on a

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)/(1+x^2)}{\cos x} = \frac{0}{\cos 0} = 0$$

(on prend $x_0 = 0$ et $f\ : x \mapsto \log(1+x^2)$, $g\ : x \mapsto \sin x$). De même

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x-\sin x}{1-\cos x}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1-\cos x}{\sin x}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big) = \frac{0}{\cos 0} = 0$$

(on applique ici deux fois de suite la règle de l'Hôpital, la première fois avec $f\ : x \mapsto x - \sin x$ et $g\ : x \mapsto 1 - \cos x$, la seconde fois avec $f\ : x \mapsto 1 - \cos x$ et $g\ : x \mapsto \sin x$, $x_0$ valant 0 dans les deux cas).

**Exercice III**

*Soient $h$ un nombre réel strictement positif et $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $[0, 2h]$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\phi$ sur $[0, h]$ par*

$$\forall\, x \in [0, h],\ \phi(x) = f(x + h) - f(x).$$

1. *Montrer que $\phi$ est de classe $C^2$ sur $[0, h]$. Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Déduire de cette formule qu'il existe $c \in [0, h]$ tel que*

$$\begin{aligned}&\big(f(2h) - f(h)\big) - \big(f(h) - f(0)\big) =\\ &= f(2h) - 2\, f(h) + f(0) = h\, \phi'(c).\end{aligned}$$

L'image par $x \mapsto x + h$ du segment $[0, h]$ est le segment $[h, 2h]$, inclus dans $[0, 2h]$ ; comme $f$ est supposée de classe $C^2$ sur $[0, 2h]$ (c'est-à-dire prolongeable en une fonction de classe $C^2$ sur un intervalle ouvert contenant ce segment), la fonction composée $x \in [0, h] \mapsto f(x + h)$ est, d'après la règle de composition des applications dérivables vue au premier semestre de MISMI, de classe $C^2$ sur $[0, h]$ car ses fonctions dérivées d'ordre respectivement 1 et 2 sont les fonctions continues (par hypothèses) $x \in [0, h] \mapsto f'(x+h)$ et $x \in [0, h] \mapsto f''(x+h)$. La fonction différence $x \in [0, h] \mapsto f(x + h) - f(x)$ est donc aussi de classe $C^2$ sur $[0, h]$ comme différence de deux fonctions de classe $C^2$ sur ce segment.

La formule des accroissements finis fait l'objet du corollaire 2.2 du cours : « *si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et que $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un nombre $c \in ]a, b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c)$* ».

On applique ici cette formule en prenant $a = 0$, $b = h$ et pour $f$ la fonction $x \mapsto \phi(x) = f(x + h) - f(x)$ (continue sur $[0, h]$ et dérivable sur $]0, h[$ car de classe $C^2$ sur $[0, h]$ d'après la question **1**). Il existe donc $c \in ]0, h[ \subset [0, h]$ tel que

$$\phi(h) - \phi(0) = \big(f(2h) - f(h)\big) - \big(f(h) - f(0)\big) = h\, \phi'(c).$$

2. *Exprimer la fonction $\phi'$ en fonction de $h$ et de la dérivée de la fonction $f$ sur $[0, 2h]$.*

Les règles de calcul rappelées dans le cours concernant le calcul de la dérivée de la composée de deux fonctions et de la différence de deux fonctions assurent que la dérivée de $\phi$ sur $[0,h]$ est la fonction

$$\phi' \ : x \in [0,h] \mapsto f'(x+h) - f'(x).$$

3. *Déduire des deux questions précédentes qu'il existe* $\alpha \in ]0,1[$ *tel que*

$$f(2h) - 2\,f(h) + f(0) = h^2\, f''(2\alpha h).$$

On a d'après le résultat établi à la question **1** :

$$f(2h) - 2\,f(h) + f(0) = h\,\phi'(c)$$

avec $c \in [0,h]$. Mais $\phi'(c) = f'(c+h) - f'(c)$ d'après le résultat établi à la question **2**. En utilisant la formule des accroissements finis sur le segment $[c, c+h]$ avec cette fois la fonction $f'$ (continue sur $[c,c+h]$ et dérivable sur $]c,c+h[$ puisque $f$ est supposée de classe $C^2$ sur $[0,2h]$), on voit qu'il existe $\xi \in ]c,c+h[ \subset ]0,2h[$ tel que

$$f(2h) - 2\,f(h) + f(0) = h\,\big(f'(c+h) - f'(c)\big) = h^2\, f''(\xi).$$

Comme $\xi \in ]c,c+h[ \subset ]0,2h[$, on peut bien exprimer $\xi$ sous la forme $\xi = 2\alpha h$ avec $\alpha \in ]0,1[$.

**Exercice IV**

1. *Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles continue sur un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et dérivable en tout point de* $]a,b[$.

   Il s'agit ici du théorème 2.5 du polycopié : « *sous les hypothèses faites ici ($f$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$), on a l'inégalité :*

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in ]a,b[} |f'(x)|$$

   *(la fonction $f$ pourrait d'ailleurs fort bien être ici une fonction à valeurs complexes au lieu de réelles)* ».

2. *Vérifier que si $x$ et $y$ sont deux éléments de* $[-\pi/4, \pi/4]$*, on a*

$$|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x-y|.$$

   La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\xi \in \mathbb{R} \mapsto 1/\cos^2\xi$ ; sur le segment $[-\pi/4, \pi/4]$, on a donc $|\tan'(\xi)| \leq 1/\cos^2(\pi/4) = 2$ car la fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $[0,\pi/2]$. La seconde inégalité

$$|\tan x - \tan y| \leq 2\,|x-y|$$

lorsque $[x,y] \subset [-\pi/4,\pi/4]$ résulte donc de l'inégalité des accroissements finis rappelée à la question **1**, avec $a=\inf(x,y)$, $b=\sup(x,y)$ et $f=\tan$. La fonction tan réalise une bijection strictement croissante entre $]-\pi/2,\pi/2[$ et $\mathbb{R}$, de fonction inverse la fonction arctangente $\arctan\ : \mathbb{R} \to ]-\pi/2,\pi/2[$. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\xi \mapsto 1/(1+\xi^2)$ ; on a donc $\sup_{\mathbb{R}} |\arctan'(\xi)| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis implique donc que si $u$ et $v$ sont deux nombres réels quelconques, on a

$$|\arctan v - \arctan u| \leq |v-u|.$$

En prenant $u=\tan x$ et $v=\tan y$, on obtient la première inégalité demandée.

3. *Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction à valeurs réelles de classe $C^p$ ($p\in\mathbb{N}$) sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable à l'ordre $p+1$ en tout point de $]a,b[$. À quelle valeur de $p$ correspond l'inégalité des accroissements finis énoncée à la question* **1** *?*

   Il s'agit ici du théorème 2.8 du polycopié : « *sous les hypothèses faites ici sur la fonction $f$ (de classe $C^p$ sur $[a,b]$ et admettant une dérivée à l'ordre $p+1$ sur $]a,b[$), on a l'inégalité :*

$$\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k\Big| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x\in]a,b[} |f^{(p+1)}(x)|$$

   *(la fonction $f$ pourrait d'ailleurs fort bien être ici une fonction à valeurs complexes au lieu de réelles)* ». C'est lorsque $p=1$ que cet énoncé correspond à l'inégalité des accroissements finis rappelée à la question **1**.

4. *Montrer*[1] *que pour tout $x>1$*

$$\Big|\ln(x) - \frac{(x-1)(3-x)}{2}\Big| \leq \frac{(x-1)^3}{3}.$$

   On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $p=2$ pour la fonction $f=\ln$, en prenant $a=1$ et $b=x$. On observe que $f(a)=0$, $f'(a)=1$,

1. Une erreur dans cette formule a été rectifiée lors de l'examen.

$f''(a) = -1$ puisque $f$ est une fonction de classe $C^\infty$ sur $]0, \infty[$ et que l'on a $f' : \xi \in ]0, +\infty[ \mapsto 1/\xi$ et $f'' : \xi \in ]0, +\infty[ \mapsto -1/\xi^2$. On a donc

$$\begin{aligned} & f(b) - f(a) - f'(a)\,(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}\,(b-a)^2 = \\ & = \ln(x) - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} = \ln(x) - \frac{(x-1)(3-x)}{2}. \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'inégalité est $(x-1)^3/6 \times \sup_{]1,x[} |f'''|$. Comme la dérivée à l'ordre 3 de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $\xi \mapsto 2/\xi^3$ et est donc majorée en valeur absolue par 2 sur $[1, +\infty[$, ce membre de droite est majoré par $2(x-1)^3/6 = (x-1)^3/3$.