MISMI Semestre 2, Année 2013-2014

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir surveillé 2

Date : 28 Avril 2014 Durée : 1h30

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Peut-on déterminer x_0 de manière approchée par une méthode algorithmique et laquelle ?
3. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 2.

1. Énoncer la règle de l'Hôpital.
2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{1-\cos x}\right).$$

Exercice 3. Soient h un nombre réel strictement positif et f une fonction de classe C^2 sur $[0, 2h]$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction ϕ sur $[0, h]$ par

$$\forall\, x \in [0, h],\ \phi(x) := f(x+h) - f(x).$$

1. Montrer que ϕ est de classe C^2 sur $[0, h]$. Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Déduire de cette formule qu'il existe $c \in [0, h]$ tel que

$$\begin{aligned}\big(f(2h) - f(h)\big) - \big(f(h) - f(0)\big) &= \\ = f(2h) - 2f(h) + f(0) &= h\,\phi'(c).\end{aligned}$$

2. Exprimer la fonction ϕ' en fonction de h et de la dérivée de la fonction f sur $[0, 2h]$.
3. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$f(2h) - 2f(h) + f(0) = h^2\, f''(2\alpha h).$$

Exercice 4.

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $]a, b[$.
2. Vérifier que si x et y sont deux éléments de $[-\pi/4, \pi/4]$, on a
$$|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|.$$
3. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction à valeurs réelles de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$) sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable à l'ordre $p + 1$ en tout point de $]a, b[$. À quelle valeur de p correspond l'inégalité des accroissements finis énoncée à la question **1** ?
4. Montrer que pour tout $x > 1$
$$\left| \log(x) - \frac{(x-1)(x-3)}{2} \right| \leq \frac{(x-1)^3}{6}.$$