Calculs avec les nombres réels et complexes

Exercice 1 : inégalité (1)

Montrer l'inégalité suivante : pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Exercice 2 : produit de complexes

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = \sum_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} z^{\ell}$.

2) En déduire que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 3 : inégalité (2)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in [0; +\infty[$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$.
2. On suppose maintenant que $a_1, \cdots, a_n \in [1; +\infty[$. Déduire de 1) que $n + \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exercice 4 : inégalité (3)

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
2. En déduire la valeur de $E\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ où $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x.

Suites numériques

Exercice 5 : suites arithmétiques et géométriques

1. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{100}.
2. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?
3. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$. Calculer u_{20}.
4. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

Exercice 6 : démonstrations de cours

1. Montrer que si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente alors sa limite est unique.
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en utilisant la définition de la limite.
3. Montrer qu'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite.

4. Étudier la convergence des suites définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = i^n$.

Exercice 7 : définition limite

1) [DM 1 2011-2012] Montrer, à l'aide de la définition de la limite d'une suite, que la suite de terme général $u_n = \dfrac{3n}{4n+2}$, pour $n \geq 0$, converge et calculer sa limite.

2) [DM 1, 2012-2013] En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{5n+3}{3n+5}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8 : cours + convergence de suites (1)

On considère les suites de terme général suivant :

$$1)\ \alpha_n = \frac{2+\cos(n)}{n}, \quad 2)\ \beta_n = (2+\cos(n))n, \quad 3)\ \gamma_n = (-1)^n(2+\cos(n))n, \quad 4)\ \delta_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

1. **cours :** Montrer qu'une suite convergente est bornée.
2. Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?
3. Sont-elles convergentes ?

Exercice 9 : convergence de suites (2)

Étudier la convergence et déterminer la limite (si elle existe) des suites suivantes :

$$1)\ \frac{\cos(n)}{n},\ 2)\ \sqrt[n]{3+\sin(n)},\ 3)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\ 4)\ \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+3)},\ 5)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}},\ 6)\ \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}.$$

Exercice 10 : convergence de suites (3) [DM 1, 2011-2012] et [DM 1 2012-2013]

La suite de terme général u_n (pour n suffisamment grand), dans chaque cas suivant, est-elle divergente ? convergente ? Calculer sa limite le cas échéant :

$$u_n = \frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4}, \quad u_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)};$$

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad u_n = \frac{2n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}, \quad u_n = n^{1/n}\ ;$$

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n},\ n \geq 0 \quad b_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1},\ n \geq 0\ ; \quad c_n = \frac{e^n}{n^n},\ n \geq 1\ ;$$

$$d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k,\ n \geq 0\ ; \quad p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1\ ; \quad q_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}},\ n \geq 1\ ;$$

$$r_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n},\ n \geq 2\ ; \quad s_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}},\ n \geq 1\ ; \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{\ln k}{k}\right),\ n \geq 1\ ;$$

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k},\ n \geq 1\ ; \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,\ n \geq 1.$$

Exercice 11 : convergence de suites complexes

Étudier la convergence des suites de terme général donné ci-dessous :

$$1)\, u_n = 4 + n\mathrm{i}, \quad 2)\, v_n = \frac{n}{n+3\mathrm{i}} - \frac{n\mathrm{i}}{n+1}, \quad 3)\, w_n = \frac{n^2\mathrm{i}^n}{n^3+1}, \quad 4)\, x_n = (-1)e^{\mathrm{i}n\pi},$$
$$5)\, y_n = e^{n\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad 6)\, z_n = \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n}, \quad 7)\, z_n = \exp\left((-1)^n\frac{\mathrm{i}\pi}{n}\right).$$

Exercice 12 : suite d'entiers convergente

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 13 : convergence de $\cos(n)$ **et** $\sin(n)$

Montrer que l'existence d'une des deux limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n)$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n)$ entraînerait l'autre, et que l'existence de ces deux limites conduirait à une contradiction. Conclure.

Exercice 14 : étude de suite

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Exercice 15 : étude de suite

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = n\pi + \dfrac{1}{n}$.

1. La suite (u_n) est-elle bornée ?
2. Est-elle convergente ?
3. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers 0.

Exercice 16 : somme convergente de suites majorées

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}, (v_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a, v_n \leq b$ et $u_n + v_n \to a + b$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$.

Exercice 17 : irrationalité de e

Pour commencer en douceur : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On considère les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$. Par définition $e := \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e \leq v_n$.
2) Montrer que les inégalités sont strictes.
3) En raisonnant par l'absurde, montrer que e est irrationnel.

Exercice 18 : suite $u_{n=1} = f(u_n)$

Étudier la convergence de la suite suivante : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n$.

Exercice 19 : moyenne arithmético-géométrique

Soient $0 < a < b$, soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 20 : borne supérieure, borne inférieure

Calculer $\sup\{u_p,\, p \geq n\}$, $\inf\{u_p,\, p \geq n\}$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$;
2. $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ pour $n \geq 1$;
3. $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ pour $n \geq 1$;
4. $u_n = n^{(-1)^n}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 21 : borne supérieure, borne inférieure

Soit a un nombre réel strictement positif. On pose :

$$A = \left\{\frac{1}{1+|x|}\,;\, |x| < a\right\},\ B = \left\{\frac{1}{1+|x|}\,;\, |x| > a\right\}.$$

1. Déterminer $\max A$ et $\sup A$.
2. Déterminer $\sup B$. L'ensemble B admet-il un maximum ?

Exercice 22 : série harmonique

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. En intégrant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[n; n = 1]$, montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité double
$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que la suite de terme général $u_n := H_n - \ln(n)$ converge (indication : on montrera que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante).

Voici une autre façon de montrer que $(H_n)_{\mathbb{N}^*}$ diverge.

1. Montrer $\forall m \in \mathbb{N}, H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 23 : moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

On dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ convergente vers l alors $(c_n)_{n\geq 1}$ est également convergente de limite l.

Exercice 24 : suites de Cauchy

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Que peut-on dire de cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$?
4. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ est de Cauchy.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}$. est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge.

Exercice 25 : existence de point fixe

Soit f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel positif $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1]\,,\; |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Soit $a \in [0,1]$. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = a$, et $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f.

Exercice 26 : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 27 : suites réelles [DM 1, 2012-2013]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}$.
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 28 : $u_{n+1} = f(u_n)$ [DM 1, 2012-2013]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par les relations suivantes : $u_0 \in]0,1]$ et pour

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone. En déduire qu'elle est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 29 : suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N},\ |u_{p+q} - u_p - u_q| \leq 1.$$

1. Montrer que $\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |u_{kq} - ku_q| \leq k - 1$.
2. Montrer que, pour tout entier $r \geq 0$, on a $|u_{kq+r} - u_{kq}| \leq |u_r| + 1$.
3. En déduire que si k et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par l'entier $q > 0$, on a
$$\left|u_n - \frac{n}{q}\, u_q\right| \leq \frac{r}{q}\, |u_q| + |u_r| + k.$$
4. En déduire que la suite $(u_n/n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 30 : suites périodiques

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$.

1) Montrer que l'ensemble des suites réelles ou complexes périodiques est un espace vectoriel (réel ou complexe).

2) Montrer que toute suite de complexes périodique et convergente est constante.

Exercice 31 : espace c_0

Montrer que l'ensemble $c_0 = \{(u_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Exercice 32 : Vrai-faux

Les suites sont réelles. Dites si les affirmations suivantes sont vraies (et dans ce cas, prouvez-le) ou fausses (donnez un contre-exemple).

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. De toute suite majorée, on peut extraire une sous-suite convergente.
3. Toute suite bornée est convergente.
4. Une suite décroissante et majorée converge.
5. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ minorée par $a > 0$ alors $(u_n.v_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
6. Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.
7. Toute suite bornée est de Cauchy.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l'$, avec $l \leq l'$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [l; l']$.
9. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ convergente et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ bornée alors $(u_n.v_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente.
10. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq v_n$ et que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge. Alors $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge.
11. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq |u_n| \leq v_n$ et que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 1. Alors $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge.
12. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = l$.
13. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ convergente vers 0 et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ bornée alors $(u_n.v_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente.
14. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ bornée alors $(u_n.v_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 33 : QCM

Sans justifications, donner la (ou les) bonne(s) réponse(s) aux questions suivantes :

1. Quelle est la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$?

   $a)\ \dfrac{1}{2}$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ +\infty$ $\quad d)$ elle ne converge pas .

2. Quelle est la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(2n+1)$?

   $a)\ +\infty$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ -1$ $\quad d)$ elle ne converge pas .

3. Quelle est la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(2n\pi)$?

   $a)\ 0$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)$ On ne peut pas conclure .

4. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$. Quelle est la limite, si elle existe, de $v_n = \ln(u_n)$?

   $a)\ 0$ $\quad b)\ -\infty$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)$ elle ne converge pas .

5. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = 1$. Quelle est la limite, si elle existe, de $v_n = u_n \cdot \sin(2n+1)$?

   $a)\ 0$ $\quad b)\ -\infty$ $\quad c)\ +\infty$ $\quad d)$ elle ne converge pas .

6. On suppose $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$. Quelle est la limite, si elle existe, de $v_n = u_n \cdot \sin(2n+1)$?

   $a)\ 0$ $\quad b)\ -\infty$ $\quad c)\ +\infty$ $\quad d)$ On ne peut pas conclure .

7. Quelle est la limite, si elle existe, de $u_n = (n+1)^2 - (n-1)^2$?

   $a)\ 0$ $\quad b)\ +\infty$ $\quad c)\ -\infty$ $\quad d)$ On ne peut pas conclure .