Exercice 1 : Question de cours

1. Définition avec ε de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ où $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$. Idem avec $a = +\infty, l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}, l = -\infty$.
2. Définition de la continuité de f en un point a.
3. Caractérisation séquentielle de la continuité et démontrer l'équivalence avec la définition précédente.
4. Énoncer le théorème dse valeurs intermédiaires.
5. Définition de l'injectivité d'une fonction.
6. Énoncer le théorème des extréma d'une fonction continue sur un segment.
7. Définition de la continuité uniforme et énoncé du théorème de Heine.

Exercice 2 : Relation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Fonction indicatrice

1. Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature des points de discontinuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

Exercice 4 : Continuité d'une fonction

Étudier la continuité de la fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x - x\ln(|x|) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5 : Continuité et densité

Montrer que deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Limites d'une fonction réelle

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1}) + x), \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-5\sqrt{x}+4};$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(3(x-\frac{\pi}{4}))}{\cos(x)-\sin(x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5}-x.$$

Exercice 7 : Point fixe avec monotonie

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe. (On considérera $A := \{x \in [0,1]; f(x) \leq x\}$)

Exercice 8 : Continuité et voisinage [DM 2, 2012-2013]

1. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en $x_0 \in I$ et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que
$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$
2. En déduire que si g et h sont deux fonctions réelles sur I, continues en x_0, telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que
$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

Exercice 9 : continuité d'une restriction

Soit f à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$ (non réduit à un singleton) et $J = [c, d]$ avec $a < c < d < b$. Les deux assertions suivantes sont elles équivalentes ?
– (i) : la restriction $f_{|J}$ de f au segment J est continue (en tant que fonction de J dans $\mathbb{R}$) ;
– (ii) : la fonction $f\ : I \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment J
(si ce n'est pas le cas, donner un contre-exemple).

Exercice 10 : Relation fonctionnelle

Pour commencer, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(1/p)$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.
3. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$
4. En utilisant ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $f\ :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, continues sur $]0, +\infty[$ et telles que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$$
(on pourra considérer pour ce faire la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(e^x)$).
5. Soit $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ g(xy) = x\, g(y) + y\, g(x).$$
   (a) Calculer $g(1)$, puis $g(-1)$, et en déduire que g est impaire (c'est-à-dire que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
   (b) Pour $x > 0$, on pose $h(x) = g(x)/x$.
   – Exprimer $h(xy)$ en fonction de $h(x)$ et de $h(y)$;
   – en déduire l'expression de la fonction g.

Exercice 11 : Équation (1)

Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ admet au moins une solution.

Exercice 12 : Racines carrées dans une équation de fonctions

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle I et telles que $\forall x \in I, f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0$.
Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 13 : Point fixe avec la continuité

Soient $a < b \in \mathbb{R}, f : [a;b] \to [a;b]$ continue. Montrer $\exists x_0 \in [a;b], f(x_0) = x_0$.

Exercice 14 : Équation (2)

Soient p et q strictement positifs et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. En considérant la fonction réelle g définie sur $[a,b]$ par

$$\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = p\, f(a) + q\, f(b) - (p+q)\, f(x),$$

montrer qu'il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice 15 : Équation avec la réciproque f^{-1}

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$.
1) Montrer que f est bijective.
2) Résoudre l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 : Continuité, injectivité et monotonie

On considère la fonction $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

1. Montrer que $g([0,1]) \subset [0,1]$.
2. Montrer que $g\ : [0,1] \to [0,1)$ est une application bijective.
3. Montrer que g n'est pas monotone sur $[0,1]$ et que g n'est pas non plus continue sur $[0,1]$.

Exercice 17 : Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la fonction $f\ : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \geq 0,\ f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}.$$

1. Montrer que $f(]0,1[) \subset]0,1[$ et que $f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$.
2. Montrer que l'on peut bien définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $]0,1[$ par la condition initiale $x_0 \in]0,1[$ et la relation de récurrence
$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall\, n \geq 0.$$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

Exercice 18 : Uniforme continuité [DM 1, 2011-2012]

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de la fonction f sur le segment $[0,a]$, $a > 0$. *Indication* : étudier la continuité de f au voisinage de chaque point x_0 de I_a (considérer les deux cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).
2. La fonction f est-elle uniformément continue sur le segment I_a ? Énoncer le résultat du cours correspondant.
3. La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?
4. Donner un exemple d'une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+$, uniformément continue sur tout segment I_a, $a > 0$, mais qui ne soit pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Exercice 19 : Continuité et limites infinies. Application aux polynômes

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair ; montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 20 : Continuité et limites infinies (2)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 21 : Extréma de fonctions continues

Montrer qu'une fonction $f\ : [0,\infty[\to[0,\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ est bornée sur $[0,+\infty[$ et atteint sa borne supérieure $\sup_{[0,\infty[} f$. Atteint-elle sa borne inférieure sur $[0,\infty[$? Si ce n'est pas le cas, exhiber un contre-exemple.

Exercice 22 : Extréma de fonctions continues périodiques

Montrer qu'une fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique (c'est-à-dire telle qu'il existe $T > 0$ avec $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.

Exercice 23 : Extréma de fonctions continues

Soit $f : [0,\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ f(x) < x$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que, quelque soient les réels a et b tels que $0 < a < b$, il existe $M_{a,b} \in [0,1[$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq M_{a,b}\, x$.

Exercice 24 : Extréma de fonctions continues réelles

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est une fonction continue majorée et minorée.
2. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Vrai-Faux

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Dites si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (contre-exemple) ?

1. l'image par f d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
2. l'image par f d'un segment de $\mathbb{R}$ est encore un segment de $\mathbb{R}$;
3. l'image par f d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est encore un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$;
4. l'image <u>réciproque</u> par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemples et contre-exemples

Donner un exemple de fonction vérifiant les énoncés suivants :

1. définie sur $]0;1[$ et bornée.
2. continue, croissante et non bijective.
3. continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et non majorée.