## 1. C'est du cours

**Exercice 1 : Question de cours.**

(1) Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$ en $0$ d'une fonction $f$.

(2) Donner la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ d'une fonction $f$.

(3) Donner l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ d'une fonction $f$.

(4) Donner la définition de $f = \circ(g)$ en $a$.

(5) Donner la définition de $f \sim g$ en $a$.

(6) Donner la définition du développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$ d'une fonction $f$.

**Exercice 2 : Inégalités.** Etablir les inégalités suivantes :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

(2) $\forall x \geq 0\,,\ x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2} e^x$.

(4) $\forall x \geq 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x - 1| \leq \dfrac{x^2}{2!}$, puis $\left|\cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \dfrac{x^6}{6!}$.

(6) Pour tout réel $x$, $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

**Exercice 3 : Calcul de DL.**

(1) Écrire le DL de $\ln(x)$ au à l'ordre 3 au point 1 puis au point 5.

(2) Écrire le DL de $\exp(x-1)$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le DL de $\exp(x)$ à l'ordre 3 au point -1.

(3) Écrire le DL de $\dfrac{1}{1+(x/2)}$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le DL de $1/x$ à l'ordre 3 au point 2.

(4) Écrire le DL de $\ln(1 + \dfrac{x}{e})$ à l'ordre 2 au point 0. En déduire le DL de $\ln x$ à l'ordre 2 au point $e$.

(5) Déterminer le DL en $x_0$ à l'ordre $n$ de $x \mapsto \cos(x)$ en $x_0 = \pi/4$.

(6) Donner le développement limité de $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$ à l'ordre 4 au point 0 ainsi qu'au point 2.

## 2. Applications des formule de Taylor à la majoration d'erreur

**Exercice 4 : Majoration d'erreur.**

(1) Écrire la formule de Taylor au point 0 et à l'ordre 9 pour la fonction sinus.

(2) Soit $P(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$. Montrer que si $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ alors $P(x) \leq \sin x \leq P(x) + \dfrac{x^9}{9!}$.

(3) Trouver un nombre $a > 0$ tel que $|\sin x - P(x)| \leq 10^{-5}$ pour tout réel $x \in [0, a]$.

(4) Soit $\theta$ un angle dans $[0, 5°]$. Quelle est l'erreur maximale commise quand on dit : $\sin\theta \sim \theta$ ?

**Exercice 5 : Majoration d'erreur.** Soit un réel $x \in [0,1]$. Estimer l'erreur de l'approximation de $\sqrt{1+x}$ par : $1 + \dfrac{x}{2}$.

**Exercice 6 : Encadrement d'erreur.**

(1) Approcher la fonction $x^{1/3}$ par un polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 8$.

(2) Quelle est la précision de cette approximation lorsque $7 \leq x \leq 9$ ?

**Exercice 7 : Majoration d'erreur.**

(1) Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(2) Soit $x \geq 0$, montrer l'inégalité $1 - x + x^2 - x^3 + \dfrac{x^4}{(1+x)^5} \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$.

(3) En déduire un réel $a$ (le plus grand possible) tel que l'inégalité $|f(x) - (1 - x + x^2 - x^3)| \leq 10^{-6}$ soit satisfaite pour tout $x \in [0, a]$.

## 3. Exercices de calculs avec les DL

**Exercice 8 : Calcul de DL.** Écrire le DL en 0 à l'ordre indiqué entre parenthèses des fonctions suivantes :

$$a)\, x \mapsto e^x + \cos x \text{ ordre } 4 \ ; \ b)\, x \mapsto \cos(x^2) + \sin(x) \text{ ordre } 6 \ ; \ c)\, x \mapsto e^x \ln(1+x) \text{ ordre } 3 \ ;$$

$$d)\, x \mapsto \cos(2x)\sqrt{1+x} \text{ ordre } 3 \ ; \ e)\, x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x} \text{ ordre } 4 \ ; \ f)\, x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2} \text{ ordre } 5 \ ;$$

$$g)\, x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2} \text{ ordre } 4 \ ; \ h)\, x \mapsto \tan x \text{ ordre } 5 \ ; \ i)\, x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \text{ ordre } 4 \ ; \ j)\, x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \text{ ordre } 4 \ ;$$

$$k)\, \mapsto \ln(1 + x\sin(x)) \text{ ordre } 4 \ ; \ l)\, x \mapsto \ln(\cos(x)) \text{ ordre } 4 \ ; \ m)\, x \mapsto \exp(\sin x) \text{ ordre } 4 \ ;$$

$$n)\, x \mapsto \sqrt{\cos x} \text{ ordre } 4 \ ; \ o)\, x \mapsto \frac{1}{(1+x)^4} \text{ ordre } n \ ; \ p)\, x \mapsto \arctan(x) \text{ ordre } n \ ;$$

$$q)\, x \mapsto \ln(-x^2 + x + 6) \text{ ordre } 6 \ ; \ r)\, x \mapsto \cos^3(x) \text{ ordre } n \in \mathbb{N}^* \ ; \ s)\, x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right) \text{ ordre } 3 \ ;$$

$$t)\, x \mapsto ((\text{ch}(x) - \cos(x))(\text{sh}(x) - \sin(x)))^2\, r) \text{ ordre } 10 \ ; \ u)\, x \mapsto \sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) \text{ ordre } 3;$$

**Exercice 9 : Calcul de développement asymptotiques.** Déterminer le développement limité en $+\infty$ jusqu'au terme en $\dfrac{1}{x^3}$ de :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2};\ f_2(x) = \frac{x^3+2}{x-1};\ f_3(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 2}{x-1};\ f_4(x) = \frac{1}{\sin x};\ f_5(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x^2)}.$$

**Exercice 10 : Calcul d'équivalents.** Donner un équivalent au voisinage demandé :

$$\text{en } +\infty \text{ de } \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \ , \ \text{ en } +\infty \text{ de } n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)} \ , \ \text{ en } +\infty \text{ de } \frac{x^4+1}{x^3(x+1)(x^2+1)} \ ,$$

$$\text{en } +\infty \text{ de } (x^4+1)^{\frac{1}{4}} - x \ , \ \text{ en } 0 \text{ de } \frac{1}{\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x})} \ , \ \text{ en } +\infty \text{ de } \frac{1}{x(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} \ .$$

**Exercice 11 : Calcul de limites.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)} \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \ , \ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\sin(\sqrt{x^2+x}) - \sin(\sqrt{x^2-x})) \ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} \ , \ \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \ , \ \lim_{x\to 0} \cos(x)^{(x\sin(x))^{-1}} \ , \ \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}} \ ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} \ , \ \lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}} \ .$$

**Exercice 12 : calculs de limites, DM 2, 2011-2012.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ \sin(x)}{x - \sin(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(x - x^2\ln(1+1/x)\big) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\cos(x)} - e^{-x^2}}{\big(\sin(x)\big)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cosh(x)\ \cos(x) - 2}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{e^x}{\big(\sin(x)\big)^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\Big).$$

## 4. Exercices d'approfondissements

**Exercice 13 : calcul d'un DL.** On définit $f$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Calculer $f'(x)$. En déduire le DL de la fonction $f$ à l'ordre 5 au point 0.

**Exercice 14 : formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange.**

(1) Soit $n$ un entier strictement positif. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de $0$ à l'ordre $n$ pour la fonction $\cos(x)$.

(2) En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(2k)!$ a une limite quand $n$ tend vers l'infini, et calculer cette limite. (Penser à la fonction $\exp$)

**Exercice 15 : Etude d'une suite.**

(1) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que $u_n$ converge vers $\ln 2$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. (Penser à la fonction $\exp$)

**Exercice 16 : Un développement de Taylor-Young nul.** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(1) Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour $x > 0$ , $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-1/x}$.

(2) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x)$. En déduire que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n$, $f^{(n)}(0) = 0$.

(3) Écrire la formule de Taylor-Young de $f$ à l'ordre $n$ en 0. Que peut-on dire du développement limité de $f$ en 0 ?

**Exercice 17 : Parité du DL, DM 2, 2011-2012.** Montrer que la partie régulière d'un développement limité en $0$ d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

**Exercice 18 : Equation différentielle (1).** On se propose de trouver le développement limité à l'ordre $9$ en $0$ de la fonction dérivable tangente hyperbolique $\tanh(x)$ par la méthode de l'équation différentielle.

(1) Montrer que $\tanh$ vérifie l'équation différentielle $y' = 1 - y^2$.

(2) Donner les raisons pour lesquelles $\tanh$ admet un développement limité de la forme

$$\tanh(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + x^{10}\varepsilon_1(x)$$

où $a$, $b$ $c$ et $d$ sont des constantes réelles et $\varepsilon_1$ est une fonction nulle et continue en $0$.

(3) Donner les raisons pour lesquelles $(\tanh)'$ admet un développement limité de la forme

$$\tanh'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + x^9\varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_2$ est une fonction nulle et continue en $0$.

(4) Trouver le développement limité à l'ordre $9$ en $0$ de $\tanh(x)$.

**Exercice 19 : Equation différentielle (2),DM 2, 2011-2012.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{\mathrm{Argsh(x)}}{\sqrt{1+x^2}}$.

(1) Montrer que $f$ satisfait l'équation différentielle $(x^2+1)\, y'(x) + xy(x) = 1$.

(2) En déduire le développement limité à l'ordre 7 de $f$ en 0.

## 5. Application à l'étude de graphe de fonctions

**Exercice 20 : Asymptotes à un graphe.** Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes (on précisera d'abord les domaines de définition) :

(1) $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$.

(2) $g : x \mapsto [(x^2-2)(x+3)]^{1/3}$.

(3) $h : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.

**Exercice 21 : graphe de fonction.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln x$.
Montrer que la courbe de $f$ admet au point d'abscisse 1 une tangente que l'on déterminera. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

**Exercice 22 : Etude d'une fonction.** Soit la fonction $f \ : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$.

(1) Calculer le développement limité de $f$ à l'ordre 3 en 0.

(2) Donner la tangente à la courbe représentative de $f$ au voisinage du point $x = 0$. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de $f$ au voisinage du point $0$.

**Exercice 23 : Etude graphique.** Faire l'étude graphique des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$. En particulier étude en 0 (continuité, dérivabilité), en $-1^+$, et en $+\infty$.

(2) $x \mapsto (x+2)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En particulier étude en $0$ et asymptote en $+\infty$.

(3) $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Asymptote en $+\infty$ ? (On montrera que le polynôme $x^4-3x^3-x+1$ admet 2 zéros réels seulement en $\alpha \approx 0,564 < \beta \approx 3,071$).

**Exercice 24 : Etude d'une fonction, DM 2, 2011-2012.**

(1) Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Que peut-on dire du DL de $x \mapsto \tan(x)$ en $0$ ?

(2) Calculer le DL de $x \mapsto \tan(x)$ en $0$ à l'ordre $5$.

(3) On définit, pour $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $f$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan(x)}$. Montrer que $f$ admet une limite en $0$ que l'on calculera. Qu'en déduit-on ?

(4) Montrer que la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse $0$, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

**Exercice 25 : Une fonction et sa réciproque.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

(1) Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x$.

(2) Montrer que $f$ est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f''(0)$.

(3) Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour $f$. Préciser la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à sa tangente en 0.

(4) Déterminer les variations de la fonction $\phi : x \mapsto x\,e^x - e^x + 1$. En déduire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(5) Déterminer l'intervalle image $J$ de la fonction $f$, et montrer que la fonction réciproque $g \ : J \to \mathbb{R}$ de $f$ est deux fois dérivable sur $J$.