

Contrôle continu 1 : jeudi 5 mars 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux autorisée. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : DS 1 2013. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- 1) Montrer que les suites $(v_{2k})_{k \geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k \geq 0}$ sont adjacentes.
- 2) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ .
- 3) En calculant les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$, justifier que ℓ est un nombre compris entre 0 et 1, et dont la première décimale est dans l'ensemble $\{5, 6, 7\}$.

Exercice 2 : DS et DM années 2012 et 2013. Calculez, si elle existe, la limite des suites de terme général suivant :

$$q_n = \frac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}} \quad (n \geq 2), \quad u_n = n^{1/n} \quad (n \geq 1), \quad x_n = \frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} \quad (n \geq 1).$$

Correction du CC 1 du jeudi 5 mars 2015

Exercice 1 : DS 1 2013. 1) • On doit montrer la monotonie des suites extraites $(v_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2k})_{k \in \mathbb{N}^*}$. Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$v_{2k+3} = v_{2k+2} + \frac{1}{2k+3} = v_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} \Rightarrow v_{2k+3} - v_{2k+1} = \frac{-1}{(2k+2)(2k+3)} \leq 0.$$

Donc la suite extraite $(v_{2k+1})_{k \geq 0}$ est décroissante. De même, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2k+2} = v_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = v_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \Rightarrow v_{2k+2} - v_{2k} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \geq 0.$$

Donc la suite extraite $(v_{2k})_{k \geq 1}$ est croissante.

• Montrons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{2k+1} - v_{2k} = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{2k+1} - v_{2k} = \frac{1}{2k+1}$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$, d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{2k+1} - v_{2k} = 0$. Donc les suites extraites $(v_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) On en déduit que les suites extraites $(v_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ . Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ .

3) Calculons les 5 premiers termes de la suite : $v_1 = 1$, $v_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $v_4 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, $v_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$. On sait que $v_4 \leq \ell \leq v_5$, puisque les suites $(v_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes avec $(v_{2k+1})_{k \geq 0}$ décroissante et $(v_{2k})_{k \geq 1}$ croissante. Comme $v_4 \approx 0,58$ et $v_5 \approx 0,78$, on en déduit que

ℓ est un nombre compris entre 0 et 1 dont la première décimale est 5, 6 ou 7.

Exercice 2 : DM années 2012 et 2013.

1) Soit $n \geq 2$, alors $|q_n| \leq \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^{n+1} = +\infty$, donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$.

2) Soit $n \geq 1$, $n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, donc, par continuité de l'exponentielle en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1.$$

3) Soit $n \geq 1$, $x_n = \frac{n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} = 1$, puis, par somme et continuité de $x \mapsto x^2$ en 1, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$. Donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.