Contrôle continu 3 : rattrapage du lundi 13 avril 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (3 points).

1. Énoncer le théorème de Heine.
2. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2 (5 points). Soit f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Qu'en déduit-on pour la dérivabilité de f en 0 ?

Exercice 3 (2 points). Soit f définie et dérivable sur $]0; 1]$ par $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Étudiez la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Correction du rattrapage du CC 3.

Exercice 1. 1) Une fonction continue sur un segment $[a; b]$ avec $a < b$ est uniformément continue sur $[a; b]$.

2) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Exercice 2.

1) Soit $x > 0$, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ donc continue sur $[0; x]$, dérivable sur $]0; x[$; on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]0; x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$.
Comme $\forall x > -1, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, on a donc $\sqrt{1+x} - 1 = x\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}$. On a

$$0 < c < x \Rightarrow 1 \leq 1+c \leq 1+x \Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1+c} \leq 2\sqrt{1+x} \quad \text{car la fonction racine carré est croissante}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

d'où, pour $x > 0$, $\boxed{\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \dfrac{x}{2}.}$

2) Par définition, f est dérivable en 0 si son taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{2}$, alors, par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\underline{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = \frac{1}{2}}$.

Exercice 3.

Continuité en 0 : soit $x > 0$, $|f(x)| = \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, *i.e.*, $\underline{f \text{ est continue en } 0.}$

Dérivabilité en 0 : soit $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. Donc $\underline{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$