Contrôle continu 3 : lundi 13 avril 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (3 points).

1. Énoncer le théorème concernant les extrema d'une fonction continue sur un segment $[a;b]$ avec $a < b$.
2. Soient $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a;b[$. Donner la définition de la dérivabilité de f à droite en x_0.

Exercice 2 (5 points). Montrer que, pour tout $x > 0, x \geq \arctan(x) \geq \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3 (2 points). Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Correction du CC 3 du lundi 13 avril 2015

Exercice 1. 1) Une fonction continue sur un segment $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire, il existe $c_1, c_2 \in [a;b]$ tels que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

2) La fonction f est dérivable à droite en x_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ où $x > x_0$ doit être compris par $x \in]x_0;b[$.

Exercice 2 : La fonction $f : t \mapsto \arctan(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}, f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Soit $x > 0$, alors f est dérivable sur $[0;x]$ donc continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f(x) - f(0) = (x-0)f'(c)$, *i.e.* $\arctan(x) = \dfrac{x}{1+c^2}$. Or

$$\begin{aligned}
0 < c < x &\Rightarrow 0 \leq c^2 \leq x^2 \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{1+x^2} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+,*} \\
&\Rightarrow x \geq \frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \text{ car } x \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x > 0, \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.}$

Exercice 3 : On note $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Soit $x \neq 0$, alors $|f(x)| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$, donc $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$, *i.e.*, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.}$

2) Comme pour f, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, donc g n'a pas de limite en 0.