Contrôle continu 4 : mardi 26 mai 2015.

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : (5 points) IPP or not IPP. Calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - x)e^{2x}\, dx \ , \quad \int_{0}^{1} x \exp(x^2)\, dx.$$

Exercice 2 : (5 points) Ceci est une sommation !

1. En justifiant, exprimer sous forme d'intégrale la limite S de $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\big(\frac{k\pi}{2n}\big)$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx$ puis en déduire la valeur de S.

Correction du CC 4 du mardi 26 mai 2015.

Exercice 1.
Pour la première intégrale, on effectue deux intégrations par parties.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^2 - x)e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}\Big[(x^2-x)e^{2x}\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (2x-1)e^{2x}\, dx \ \text{ avec } \left\{\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - x, & u'(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^{2x}, & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right. \\ &= -e^{-2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big[(2x-1)e^{2x}\big]_{-1}^{1} - \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx\right) \ \text{ avec } \left\{\begin{array}{ll} u(x) = 2x - 1, & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{2x}, & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right. \\ &= -e^{-2} - \frac{1}{4}\big[e^2 + 3e^{-2}\big] + \frac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}e^{2x}\Big]_{-1}^{1} = -\frac{7}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\big[e^2 - e^{-2}\big].\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - x)e^{2x}\, dx = -2e^{-2}.}$

Pour la seconde intégrale, on remarque la forme $u'e^u$.

$$\int_0^1 x \exp(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x \exp(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\big[\exp(x^2)\big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}.$$

Exercice 2 :

1) La suite définie par $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\big(\frac{k\pi}{2n}\big)$ est le terme général d'une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sur l'intervalle $[0;1]$, donc, comme f est continue sur $[0;1]$, on en déduit que la suite converge vers $\boxed{S = \displaystyle\int_0^1 \cos^2\big(\frac{\pi}{2}x\big)dx.}$

2) Soit on se rappelle que $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$, soit on utilise l'exponentielle complexe pour linéariser $\cos^2(x)$. On a $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2^2}\big(e^{ix} + e^{-ix}\big)^2 = \frac{1}{4}\big(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\big) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 1\right) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x) + 1\, dx = \frac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}\sin(2x)\Big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx = \frac{\pi}{4}.}$

Par le changement de variable $u = \frac{\pi}{2}x$, on a $S = \displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)du$. D'après ce qui précède, on en déduit que $\boxed{S = \dfrac{1}{2}.}$