Exercice 1.

1) Soit A une partie non vide, finie de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $A = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ avec $x_k \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq k \leq n$. Alors A est majorée par $M := \max\{x_k; 1 \leq k \leq n\}$ et $M \in A$, donc $\sup(A) = \max(A) \in A$.

2) Comme $\forall x \in A, x \leq 5$ alors A est majorée par 5. A est non vide (non précisé dans l'énoncé, mais c'est le cas...) donc $\sup(A)$ existe et c'est le plus petit des majorants, donc, en particulier, $\sup(A) \leq 5$.

3) Considérons l'ensemble $A := \{5 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors, pour tout $n \geq 1, 5 - \frac{1}{n} < 5$ mais $\sup(A) = 5$. En effet, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $5 - \varepsilon \leq 5 - \frac{1}{N} \leq 5$. C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, 5 - \varepsilon \leq x \leq 5$, et comme 5 est un majorant de A , on en déduit que $5 = \sup(A)$.

4) Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$ (non vides). On note $s_A = \sup(A)$ et $s_B = \sup(B)$ (elles existent car A et B sont non vides et majorées). Montrons que $\sup(A + B) = s_A + s_B$.

D'une part, pour tout $a \in A, a \leq s_A$ et, pour tout $b \in B, b \leq s_B$, donc pour tout $x \in A + B, x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$ par définition de $A + B$, et on a $a + b \leq s_A + s_B$. Donc $\sup(A + B) \leq s_A + s_B$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $a \in A$ et $b \in B$ tels que $s_A + s_B - \varepsilon \leq a + b \leq s_A + s_B$. Or, par définition de $s_A = \sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $s_A - \frac{\varepsilon}{2} \leq a \leq s_A$. De même, il existe $b \in B$ tel que $s_B - \frac{\varepsilon}{2} \leq b \leq s_B$. Par somme, $s_A - \frac{\varepsilon}{2} + s_B - \frac{\varepsilon}{2} \leq a + b \leq s_A + s_B$, i.e. $s_A + s_B - \varepsilon \leq a + b \leq s_A + s_B$. Donc $\sup(A + B) = s_A + s_B$.

5) Supposons que $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, alors, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit φ une extractrice. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$ (*). Nous rappellerons la démonstration de (*) ci-dessous. En particulier, pour tout $n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $|x_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$, ou encore, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$.

Montrons, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. Par définition, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. On a $\varphi(0) \geq 0$ (puisque $\varphi(n) \in \mathbb{N}$). Supposons que $\varphi(n) \geq n$. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante. Donc, par hypothèse de récurrence, $\varphi(n+1) > n$, i.e. $\varphi(n+1) \geq n+1$. D'où (*).

Pour la réciproque, supposons que toute suite extraite de (x_n) est convergente. En particulier, avec $\varphi(n) = n$, la suite extraite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente. Donc l'équivalence est vraie. Si, si, $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{\mathbb{N}}$...

6) Si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $(|x_n|)_{\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors, par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, ||a| - |b|| \leq |a - b|$ (un doute ? allez voir l'inégalité triangulaire (1.5) page 9 du fascicule ;-)) Donc, pour $n \geq N, ||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

La réciproque est fautive. On considère la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}, |x_n| = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 1$, mais $(x_n)_{\mathbb{N}}$ diverge puisqu'elle a deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.

7) Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \sup(A)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après ce qui précède, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{10^N}$, il existe $x \in A$ tel que $a - \frac{1}{10^N} \leq x \leq a$. Cela signifie que l'ensemble $A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$ est non vide.

Remarque : je l'ai indiqué en TD, on a équivalence entre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x \leq a.$$

8) Par hypothèse a est un majorant de A . Il reste à montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^N} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{10^N} \leq \varepsilon$. Par ailleurs, l'ensemble $A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$ est non vide par hypothèse, donc il existe $x \in A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$, c'est-à-dire, il existe $x \in A$ vérifiant $a - \frac{1}{10^N} < x \leq a$. Donc, il existe $x \in A$, tel que $a - \varepsilon \leq a - \frac{1}{10^N} < x \leq a$. D'où $a = \sup(A)$.

Exercice 2.

1) C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente.

2) Considérons la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée puisque, pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$, mais $(u_n)_{\mathbb{N}}$ diverge.

3) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5} \right) = L$ et que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ . **Attention, φ est fixée maintenant...**

On note $v_n = u_n + \frac{u_{5n}}{5}$, alors la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers L , donc la suite extraite $(v_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers L . Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{5\varphi(n)} = 5(v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)})$, alors la suite $(u_{5\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ est convergente comme somme de suites convergentes et, d'après ce qui précède, elle converge vers $5(L - \ell)$.

4) **Remarque :** pour simplifier la rédaction, montrons que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k vérifiant $\ell_k = -5(L - \ell_{k-1})$.

La suite $(u_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_0 = \ell$. Pour $k = 1$, d'après la question 3), la suite $(u_{5\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et on a $\ell_1 = 5(L - \ell_0)$.

Soit $k \geq 1$. Supposons que $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et on a $\ell_k = 5(L - \ell_{k-1})$. On note $\psi(n) = 5^k \varphi(n)$. Alors, par hypothèse de récurrence, $(u_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et, d'après (**), la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie dans la question 3), converge vers L . Donc, la suite extraite $(v_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers L , et, par somme, la suite $(v_{\psi(n)} - u_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers $L - \ell_k$. Comme, pour $n \in \mathbb{N}$, $5(v_{\psi(n)} - u_{\psi(n)}) = u_{5\psi(n)}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{5\psi(n)} = 5(L - \ell_k)$, c'est-à-dire $(u_{5^{k+1} \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers un réel, qu'on note ℓ_{k+1} , et on a $\ell_{k+1} = 5(L - \ell_k)$.

Donc, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et on a $\ell_k = 5(L - \ell_{k-1})$.

5) • Soit $k \in \mathbb{N}$, alors, d'après la question précédente, $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = 5(L - \ell_k) - \frac{5L}{6} = \frac{25L}{6} - 5\ell_k = -5(\ell_k - \frac{5L}{6})$. D'où, pour $k \in \mathbb{N}$, $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = -5(\ell_k - \frac{5L}{6})$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$, $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = -5(\ell_k - \frac{5L}{6})$. Pour $k \geq 1$, $\ell_k - \frac{5L}{6} = -5(\ell_{k-1} - \frac{5L}{6})$, donc

$$\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5) \times (-5)(\ell_{k-1} - \frac{5L}{6}) = (-5)^2(\ell_{k+1-2} - \frac{5L}{6}).$$

Supposons $k \geq p$ et $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^p(\ell_{k+1-p} - \frac{5L}{6})$ (vérifiée pour $p = 1$). Alors $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^p \times (-5)(\ell_{k+1-p-1} - \frac{5L}{6})$ car $\ell_{k+1-p} - \frac{5L}{6} = -5(\ell_{k+1+p-1} - \frac{5L}{6})$. D'où $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^{p+1}(\ell_{k+1-(p+1)} - \frac{5L}{6})$. En particulier, pour $p = k$, $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^{k+1} \times (-5)(\ell_0 - \frac{5L}{6})$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-M; M]$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les limites des suites extraites $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ appartiennent à $[-M; M]$, i.e. $\ell_k \in [-M; M]$. Notons $x_k = \ell_k - \frac{5L}{6}$, on vient de prouver que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'après ce qui précède, on a aussi $x_k = (-5)^k(x_0 - \frac{5L}{6})$. Supposons que $\ell \neq \frac{5L}{6}$, c'est-à-dire, $\ell - \frac{5L}{6} \neq 0$. Alors, la suite extraite $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^{2k} = +\infty$.

Par conséquent, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Contradiction. Donc $\ell = \frac{5L}{6}$.

6) Reprenons. On suppose que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5} \right) = L$. Puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une suite extraite convergente. Soit $(u_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ une suite extraite convergente. Alors, on vient de montrer que sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{5L}{6}$. C'est-à-dire, toute suite extraite convergente converge vers la même limite $\frac{5L}{6}$. On en déduit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $\frac{5L}{6}$. C'est la propriété 1.10 page 10 du fascicule.

Remarque sur la question 3), erreur fréquente : suite extraite de suite extraite. Notons $w_n = u_{\varphi(n)}$, qui définit une suite extraite de (u_n) . Soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On peut alors définir une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ d'extractrice ψ , c'est-à-dire $w_{\psi(n)}$ et on a $w_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$ et non $u_{\psi(\varphi(n))}$!! Pensez à la suite extraite d'indice impair : $(w_n) = (u_1; u_3; u_5; \dots; u_{2n+1}; \dots)$ définie par $w_n = u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $\varphi(n) = 2n + 1$. Une suite extraite de cette suite extraite est une suite "dont les indices sont impairs, mais on ne les prend pas tous". Exemple $(w_{2n}) = (u_1; u_5; u_9; \dots; u_{4n+1}; \dots)$ avec $\psi(n) = 2n$, et on a $w_{2n} = u_{4n+1} = u_{\varphi(\psi(n))}$.