MISMI Semestre 2, Année 2014-2015

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir Maison 1

Exercice 1

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Vous justifierez votre réponse chaque fois soit avec une démonstration, soit avec un contre-exemple (suivant que vous pensiez que l'assertion en question soit vraie ou fausse). Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $\sup A$ la borne supérieure de A.

1. Une partie finie non vide A de $\mathbb{R}$ contient toujours sa borne supérieure $\sup A$.
2. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in A, \quad x \leq 5,$$
alors $\sup A \leq 5$.
3. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in A, \quad x < 5,$$
alors $\sup A < 5$.
4. Si A et B sont deux parties bornées de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire toutes deux incluses dans un même segment $[-M, M]$) et que l'on note
$$A + B := \{a + b\,;\, a \in A,\ b \in B\},$$
alors
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$
5. Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels converge vers une limite réelle si et seulement chaque suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite réelle ;
6. Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels converge vers une limite réelle ℓ si et seulement si la suite $(|x_n|)_{n\geq 1}$ converge vers $|\ell|$.
7. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et que $a = \sup A$, le sous-ensemble $A \cap\,]a - 1/10^N, a]$ est non vide pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
8. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et que a est un majorant de A tel que le sous-ensemble $A \cap\,]a - 1/10^N, a]$ soit non vide pour tout $N \in \mathbb{N}$, alors $a = \sup A$.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On suppose :

$$\exists\, M > 0 \quad \text{tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [-M, M] \tag{$*$}$$

Quel théorème permet d'affirmer qu'il existe au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini ?

2. Donner un exemple d'une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 0}$ divergente et vérifiant tout de même $(*)$.

3. On suppose maintenant que l'on a toujours $(*)$, mais cette fois aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5} \right) = L \qquad (**).$$

et que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle ℓ (une telle sous-suite existe d'après la question **1**). En utilisant $(**)$, montrer alors que la suite $(u_{5\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est aussi convergente et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{5\varphi(n)} = 5(L - \ell).$$

4. Toujours en utilisant $(**)$, montrer par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{5^k\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ_k et que l'on a

$$\ell_0 = \ell \quad \text{et} \quad \ell_{k+1} = 5(L - \ell_k).$$

5. Vérifier que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)\Big(\ell_k - \frac{5L}{6}\Big).$$

En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ell_k - \frac{5L}{6} = (-5)^k\Big(\ell - \frac{5L}{6}\Big).$$

En utilisant le fait que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont dans $[-M, M]$, déduire de ce qui précède que $\ell = 5L/6$.

6. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle une suite convergente dans $\mathbb{R}$? Si oui, quelle est la valeur de sa limite ?