MISMI Semestre 2, Année 2014-2015

UE M1MI2011 : ANALYSE 1 - Devoir Maison 2

Exercice 1

1. Donner un exemple d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit dérivable que sur $\mathbb{R}^*$ mais admette pourtant des dérivées à gauche et à droite (distinctes) en $x_0 = 0$.
2. On considère un nombre $\alpha > 0$. Montrer que la fonction

$$f_\alpha \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ |x|^\alpha \cos(1/|x|) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

   est continue sur $\mathbb{R}$. Quelle condition nécessaire et suffisante faut-il imposer au nombre $\alpha > 0$ pour que cette fonction soit dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer dans ce cas la fonction dérivée f'_α (on distinguera les trois cas $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, $x_0 > 0$ pour calculer en fonction de α et de x_0 la valeur du nombre dérivé $f'_\alpha(x_0)$).

Exercice 2

1. Soient $M > 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, dérivable et de nombre dérivé $f'(x_0) \in [-M, M]$ en tout point x_0 intérieur à I. Montrer que f est uniformément continue sur I. L'hypothèse de dérivabilité en tout point intérieur est-elle vraiment nécessaire dans le cas où l'intervalle I est un segment $[a, b]$? Préciser bien le théorème utilisé pour justifier la réponse à cette dernière question.
2. Donner un exemple de fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais non dérivable en 0 (penser à exploiter l'inégalité triangulaire telle qu'elle est énoncée en (1.5) dans le polycopié).

Exercice 3. Soit f et g les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 2x - 3.$$

1. Soient a et b deux nombres réels. Donner l'équation de la tangente $T_{f,a}$ au graphe de f au point $(a, f(a))$, puis celle de la tangente $T_{g,b}$ au graphe de g au point $(b, g(b))$.
2. Trouver la relation que doivent satisfaire a et b pour que les deux tangentes $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ soient parallèles. Existe-t-il des couples de valeurs (a, b) tels que les tangentes $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ soient confondues ? Si oui, les déterminer.

T.S.V.P

3. Soit F la fonction $F\ : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) + i\, g(x) \in \mathbb{C}$. Montrer que F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ (comme fonction à valeurs complexes) et calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le nombre dérivé $F'(a)$. Donner (toujours en fonction de a) l'équation cartésienne
$$A(a)x + B(a)y + C(a) = 0$$
de la tangente à la courbe paramétrée par $x \mapsto F(x)$ au point $F(a)$.

Exercice 4

Évaluer les limites suivantes en expliquant précisément la démarche utilisée pour les calculer :

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{(\sin(x))^2}{1-\cos(x)}\Big), \quad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\ln\big(\cos(2x)\big)}{\ln(\cos\big(x)\big)}\Big), \quad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{2^x - 1}{x}\Big),$$
$$\lim_{x\to 1} \Big(x^{1/(1-x)}\Big), \quad \lim_{x\to 0^+} \Big(x^{(\sin(8x))/x}\Big).$$

Exercice 5

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction $f\ : x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dérivable à l'ordre n en tout point de $\mathbb{R}$ et que la fonction dérivée $f^{[n]}$ (à l'ordre n) est de la forme
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = H_n(x)\ \exp(-x^2/2).$$
où H_n est une fonction polynomiale de degré exactement n (on déterminera aussi la relation inductive permettant de calculer H_{n+1} à partir de H_n).
2. Que valent les limites $\lim_{x\to\pm\infty} f^{[n]}(x)$ (pour n fixé dans $\mathbb{N}$) ?
3. Toujours par récurrence sur n, démontrer en utilisant le théorème de Rolle 2.4 du polycopié (ou une petite variante, lorsque le segment $[a, b]$ se trouve remplacé par $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme H_n admet exactement n racines réelles distinctes. Ce polynôme H_n peut-il avoir d'autres racines complexes que celles là ?