Exercice 1.

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc, l'intégrale W_n est bien définie.

1.b) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$, $\quad W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0+1 = \boxed{1}$.

$W_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$. Comme, pour $x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, alors

$W_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

1.c) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq 0$ donc, $\sin^n(x) \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \geq 0$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n = 0$ alors, comme $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue et à valeurs positives sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin^n(x) = 0$. Impossible, donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_n > 0.}$

1.d) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$ et, par produit par un nombre compris entre 0 et 1, on a $sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. Par croissance (ou positivité) de l'intégrale on a $W_{n+1} \leq W_n$. Donc $\boxed{\text{la suite } (W_n)_{\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

2.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\sin(x)dx$. On effectue une intégration par partie avec $u(x) = \sin^{n+1}(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ et $v(x) = -\cos(x)$, d'où

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)dx = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin^2(x))dx \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.\end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où, pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n.}$

2.b) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors, d'après la question précédente,

$$w_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n = (n+1)W_nW_{n+1} = w_n.$$

Donc la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est constante. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 = W_0W_1 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$ (d'après la question 1.b)).

3.a) La suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante, donc, pour $n \geq 1$, $\boxed{W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}}$. Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1} &\Rightarrow W_{n+1}W_n \leq W_n^2 \leq W_nW_{n-1} \quad \text{car, d'après la question 1.c) } W_n \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{w_n}{(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{w_{n-1}}{n} \quad \text{par définition de } w_n \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n} \quad \text{car } w_n \text{ est constante égale à } \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{car } W_n \geq 0.\end{aligned}$$

D'où la relation demandée.

3.b) Soit $n \geq 1$ alors, d'après la question précédente, $\sqrt{\dfrac{n\,\pi}{2(n+1)}} \leq \sqrt{n}W_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n\,\pi}{2(n+1)}} = \frac{\pi}{2}$, on déduit du théorème d'encadrement des limites que $(\sqrt{n}W_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge et que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \frac{\pi}{2}.}$

4) D'après l'équivalent de Stirling, nous avons, $v_n = \dfrac{n!}{n^n} \sim \dfrac{n^n}{n^n}\dfrac{1}{e^n}\sqrt{2\pi n} \sim e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}\sqrt{n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.}$

Exercice 2.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$. Pour $x > -1$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ et $f(0) = 0$. Soit $x > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule de Taylor appliquée à f sur l'intervalle $[0;x]$, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = u_n + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}$, d'où $|f(1) - u_n| = \dfrac{1}{n(1+c)^n} \leq \dfrac{1}{n}$ car $1 + c \geq 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(1) - u_n| = 0$, *i.e.* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).}$

Remarque : En fait, on peut montrer que, pour tout $x \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \ln(1+x)$.

Exercice 3.

1) On effectue le changement de variable $u(x) = \frac{\pi}{4} - x$ où $u : [0; \frac{\pi}{4}] \to [0; \frac{\pi}{4}]$ est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = -\int_{u(0)}^{u(\pi/4)} \ln(\cos(u))\, du = -\int_{\pi/4}^{0} \ln(\cos(u))\, du$.

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx.}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x) + \sin(x))$. Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ alors $1 + \tan(x) = \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos(x)}$. Donc, pour $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$,
$\ln(1 + \tan(x)) = \ln\left(\sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos(x)}\right) = \ln(\sqrt{2}) + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) - \ln(\cos(x))$. Par intégration,
$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))\, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2})\, dx + \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))\, dx = \ln(\sqrt{2}) \times \frac{\pi}{4}$ (en utilisant le résultat de la question 1.). Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))\, dx = \frac{\pi\ln(2)}{8}.}$

Exercice 4.

1) On effectue une intégration par partie avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$ donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\, dx &= [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}.\end{aligned}$$

2) On procède par intégration par partie successives (deux en l'occurence) en dérivant le polynôme et en intégrant la fonction $\cos(ax)$. Alors $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = x^2 + 1$ et $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = 2x$,

$$\int_0^1 (x^2 + 1)\cos x\, dx = \left[(x^2 + 1)\sin(x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 x\sin(x)\, dx = 2\sin(1) - 2\int_0^1 x\sin(x)\, dx.$$

À nouveau, $u'(x) = \sin(x), v(x) = x$ et $u(x) = -\cos(x), v'(x) = 1$, d'où

$$\int_0^1 x\sin(x)\,dx = \big[-x\cos(x)\big]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\,dx = -\cos(1) + \big[\sin(x)\big]_0^1 = -\cos(1) + \sin(1).$$

Donc $\boxed{\int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx = 2\cos(1).}$

3) On effectue le changement de variable $u(x) = \ln(x)$ qui est une bijection croissante de $[e;3]$ dans $[1, \ln(3)]$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $du = \dfrac{dx}{x}$, d'où $\displaystyle\int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx = \int_{u(e)}^{u(3)} \frac{du}{u^3} = \left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^{\ln(3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln(3)^2}$.

Donc $\boxed{\displaystyle\int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln(3)^2}.}$

4) On linéarise $\sin^3(x)$: $\sin(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ donc $\sin^3(x) = \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3$, d'où

$$\sin^3(x) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^2}\cdot\frac{e^{3\mathrm{i}x} - 3e^{\mathrm{i}x} + 3e^{-\mathrm{i}x} - e^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{e^{3\mathrm{i}x} - e^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - 3\cdot\frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) = -\frac{1}{4}\big(\sin(3x) - 3\sin(x)\big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\big[\cos(\tfrac{3\pi}{2}) - 1\big] - \frac{3}{4}\big[\cos(\tfrac{\pi}{2}) - 1\big] = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}.}$

Remarque : il s'agit d'une intégrale de Wallis (cf. Exercice 1). D'après la relation de récurrence de la question 2.a), on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = W_3 = \frac{2}{3}W_1 = \frac{2}{3}$. Plutôt rapide, non ? De fait, on aurait pu faire une intégration par partie avec $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin^2(x)$ et raisonner comme à la question 2.a) de l'exercice 1.

<u>Exercice 5.</u>

1) Le dénominateur vérifie $x^2 + x^3 = x^2 + \circ(x^2)$, donc on cherche un développement limité à l'ordre 2 du numérateur. On sait que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et $\sin(x) = x + \circ(x^2)$ donc, par somme puis produit, on obtient,

$$(1 - e^x)\sin(x) = -\big(x + \frac{x^2}{2}\big) \times (x) + \circ(x^2) = -x^2 \circ (x^2).$$

Par quotient, $\dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} = \dfrac{-x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2+x^3} = \dfrac{-1+\varepsilon(x)}{1+x}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} = -1.}$

2) Déterminons un équivalent du dénominateur : on sait que, au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x$ donc par composition $\sin(2x) \sim 2x$ puis par produit, $\sin^2(2x) \sim 4x^2$. On cherche le développement limité à l'ordre 2 du numérateur. On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$, donc par composition avec $3x$ (car $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$!), $\cos(3x) = 1 - \dfrac{9x^2}{2} + \circ(x^2)$ et $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$. Donc, par composition,

$$\ln(\cos(3x)) = \ln(1 - \frac{9x^2}{2}) + \circ(x^2) = -\frac{9x^2}{2} + \circ(x^2) \text{ c'est-à-dire } \ln(\cos(3x)) \sim -\frac{9x^2}{2}.$$

Par quotient, on en déduit que $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)} \sim -\dfrac{9x^2}{8x^2}$, quand x tend vers 0, *i.e.* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)} = -\dfrac{9}{8}.}$

3) **J'ai fait une jolie coquille pour cette limite. Il s'agit de** $\sinh$ **et non** $\sin$**...**
Commençons par la limite demandée (avec $\sin$ donc). Pour x assez grand,
$\left|\sin\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sin\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right| \leq 1+1 = 2$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\sin\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sin\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right) = 0...}$

Voici la limite plus intéressante (avec $\sinh$). On rappelle que $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, donc, pour $x \geq 0$,
$\sinh\left(\sqrt{x^2+x}\right) = \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \exp\left(-\sqrt{x^2+x}\right)}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\sqrt{x^2+x}\right) = 0$ alors, lorsque x tend vers $+\infty$, $\sinh\left(\sqrt{x^2+x}\right) \sim \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{2}$.
De même, pour x grand, $\sinh\left(\sqrt{x^2-x}\right) = \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2-x}\right) - \exp\left(-\sqrt{x^2-x}\right)}{2}$, et on a l'équivalent suivant en $+\infty$, $\sinh\left(\sqrt{x^2-x}\right) \sim \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2-x}\right)}{2}$.

Maintenant on cherche un développement limité de $\exp\left(\sqrt{x^2-x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On se ramène aux développements limité en 0 en factorisant par x^2. On obtient $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et $\sqrt{x^2-x} = x\sqrt{1-\frac{1}{x}}$
Or on sait que $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \circ(t^2)$ lorsque t tend vers 0. Donc, par composition avec $t = \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on trouve $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\underline{\sqrt{x^2+x} = x + \frac{1}{2} + \circ(1).}$
De même, $\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\underline{\sqrt{x^2-x} = x - \frac{1}{2} + \circ(1).}$

On va en déduire un équivalent de $\exp\left(\sqrt{x^2+x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$. On utilise la propriété suivante : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$ alors $\exp(f(x)) \sim \exp(g(x))$.
Remarque : normalement, c'est du cours... Un bon exercice serait de démontrer cette propriété.
Ici $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ et $g(x) = x + \frac{1}{2}$, et le développement limité obtenu ci-dessus nous dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$, donc $\underline{\exp\left(\sqrt{x^2+x}\right) \sim \exp\left(x+\frac{1}{2}\right) = e^x\, e^{1/2}.}$
De même, avec $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ et $g(x) = x - \frac{1}{2}$, on obtient $\underline{\exp\left(\sqrt{x^2-x}\right) \sim \exp\left(x-\frac{1}{2}\right) = e^x\, e^{-1/2}.}$
Donc, par somme, on obtient,

$$\sinh\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sinh\left(\sqrt{x^2-x}\right) \sim \frac{1}{2}\cdot\left(e^x\, e^{1/2} - e^x\, e^{-1/2}\right) = \sinh(2)\, e^x$$

Donc, par produit, lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-x}\left(\sin\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sin\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right) \sim \sinh(2)$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\sin\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sin\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right) = \sinh(2).}$

<u>Exercice 6</u>.

1) Si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a;b]$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) = \int_a^b f(t)\,dt,}$

où $\zeta_k \in \left[a + k\frac{b-a}{n}; a + (k+1)\frac{(b-a)}{n}\right]$.

En particulier, lorsque $\zeta_k = a + k\frac{b-a}{n}$, on obtient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.}$

Enfin, si $a = 0, b = 1$, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.}$

2) Fait en TD.