Exercice 1 : Intégrales de Wallis.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. (a) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale W_n est bien définie.
   (b) Calculer W_0, W_1 et W_2.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n \geq 0$. Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n = 0$?
   (d) Montrer que la suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ? *Indication : on calculera* w_0.
3. (a) Justifier que, pour $n \geq 1$, $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et en déduire que $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} W_n$.

Les intégrales de Wallis permettent d'obtenir l'équivalent de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. *Cette magnifique formule (si, si...) se traduit par* $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + \circ(1)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *Nous allons utiliser cette formule pour comparer* $n!$ *et* n^n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

4. Soit $(v_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{n!}{n^n}$. À l'aide de l'équivalent de Stirling, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 2 : Étude d'une suite.

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange (ou la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral) à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que u_n converge vers $\ln 2$.

Exercice 3 : Avec la trigonométrie, on tourne en rond...

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos(\frac{\pi}{4} - x)\right) dx$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$. *Indication : on exprimera* $1+\tan(x)$ *en fonction de* $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$ *et* $\cos(x)$.

Exercice 4 : *Calculus* comme disent les américains...

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \arctan x\, dx; \quad \int_0^1 (x^2+1)\cos x\, dx; \quad \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx.$$

Exercice 5 : Limite via développements limités.

Calculer les limites à l'aide des développements limités.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\sin\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \sin\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right).$$

Exercice 6 : Somme de Riemann.

1. Expliciter le résultat concernant le calcul d'une intégrale par les sommes des Riemann pour une fonction f continue sur $[a;b]$ dans le cas d'une subdivision régulière, i.e. de pas $\frac{b-a}{n}$. Préciser ce résultat lorsque $a=0$ et $b=1$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.