Retour sur la question 1 de l'exercice A52

Je rappelle l'énoncé de la question 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, continue sur $]0;+\infty[$ et vérifie

$$\forall x > 0, f(x) < x. \quad (\star)$$

On demande de montrer que $f(0) = 0$. **C'est effectivement faux**, en général. On donnera un contre-exemple ci-dessous (c'est le genre de fonction dont on a parlé en TD).
Par contre, si f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (donc continue en 0), alors, il est vrai que $f(0) = 0$.

Contre-exemple. Considérons f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \exp\big(-\frac{1}{x}\big)$. Alors f est définie sur $\mathbb{R}^+$, continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et vérifie $(\star)$, mais $f(0) \neq 0$.
En effet, pour vérifier $(\star)$, on étudie la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ définie pour $x > 0$. Dans notre cas, f est dérivable et on a $g'(x) = \dfrac{(\frac{1}{x} - 1)\exp(-\frac{1}{x})}{x^2}$. On montre alors que g' est positive sur $]0;1]$ et négative sur $[1;+\infty]$. Par conséquent, g atteint son maximum en 1 et on a $g(1) = f(1) = e^{-1} < 1$. Donc, $\forall x > 0, g(x) < 1$, *i.e.* $\boxed{f(x) < x.}$

Conclusion : je me suis trompé ce matin, l'énoncé était faux.