Exercice A91. *Voici les développements limités à trouver en espérant que je n'ai pas fait d'erreurs...*

1) $\cos(x^2) + \sin(x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^5}{5!} + \circ(x^6)$.

2) $\cos(2x)\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{17}{16}x^2 - \dfrac{3}{16}x^3 + \circ(x^3)$.

3) $\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2} = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \circ(x^4)$.

4) $(\sin(x^3))^{1/3} = x - \dfrac{x^3}{18} - \dfrac{x^{13}}{3240} + \circ(x^{13})$.

5) $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1 - 12x + 3390x^2 + \circ(x^2)$.

6) $\ln(1 + x\sin(x)) = x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$.

7) $\exp(\cos(x)) = e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}\right) + \circ(x^4)$.

8) $(1+\cos(x))^{1/3} = 2^{1/3}\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) + \circ(x^4)$

9) $\dfrac{x}{e^x - 1} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + \circ(x^4)$.

10) $(1+x)^{1/x} = e\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{24}x^2 + \dfrac{7}{16}x^3\right) + \circ(x^3)$.

Exercice A100. *Voici les limites à trouver en espérant à nouveau que je n'ai pas fait d'erreurs...*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \cdot \left(\dfrac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right) = -\dfrac{3}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)} = \dfrac{2}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{\sinh^2(x)}\right) = \dfrac{2}{3}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{ax} + e^{bx}}{2}\right)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice A101. *Voici un exemple de calcul de limite en $+\infty$.*

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

On a $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \circ(t^2)$ quand t tend vers 0, donc par composition avec $t = \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$), on a $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Puis par produit et somme, $x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - \left(x - \frac{1}{2}\right) + \circ(1) = \frac{1}{2} + \circ(1)$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{2}.}$