

Correction Contrôle continu 1

Exercice 1

1) Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2) On considère la fonction f définie sur $] - 1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Soit $x \geq 0$, f est (dérivable sur $] - 1; +\infty[$ donc) continue sur $[0; x]$, dérivable sur $]0; x[$; on en déduit que $\exists c \in]0; x[, f(x) - f(0) = xf'(c)$.

Comme $\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, on a donc $\sqrt{1+x} - 1 = x \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$.

On a $0 < c < x \Rightarrow 1 \leq 1+c \leq 1+x$

$\Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1+c} \leq 2\sqrt{1+x}$ car la fonction racine carré est croissante

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

d'où, pour $x \geq 0$, $\frac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$.

Enfin, comme $x \neq 0$ et $x > 0$, on obtient $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \leq \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

1) f est définie sur $] - 1; +\infty[$, f est infiniment dérivable sur $] - 1; +\infty[$, et on a $\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x}$,

puis $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1, \boxed{f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}}.$

2) Soit $x \geq 0$. $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$,
 $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = -1$, et $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$.

D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $[0; x]$, il existe $c \in]0; x[$ tel que

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c)$, c'est-à-dire

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}. (*)$$

Comme $0 < c < x$, on a

$1 \leq 1+c \leq 1+x \Rightarrow 1 \leq (1+c)^3 \leq (1+x)^3$ (car la fonction cube est croissante)

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{(1+c)^3} \geq \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow x^3 \geq \frac{x^3}{(1+c)^3} \geq \frac{x^3}{(1+x)^3}. \quad (\text{car } x \geq 0 \text{ donc } x^3 \geq 0)$$

Donc, en appliquant l'inégalité précédente à l'égalité (*),

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq f(x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}.$$

3) D'après l'inégalité précédente, $|f(x) - (x - \frac{x^2}{2})| \leq \frac{x^3}{3}$ pour $x \geq 0$.

Soit $a \geq 0$, pour $x \in [0, a]$, $|f(x) - (x - \frac{x^2}{2})| \leq \frac{a^3}{3}$.

Donc $\frac{a^3}{3} = 10^{-6} \Leftrightarrow a = (3 \cdot 10^{-6})^{\frac{1}{3}} \approx 0,10405$. On prend $\boxed{a = 0,104}$.

Question bonus de l'exercice 1

Il suffit d'appliquer le théorème d'encadrement des limites (théorème des gendarmes).