Exercice 1 : Développements limités.

1) f est infiniment dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a $f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. On a alors $f(x) = \tan(x)$ et $f'(x) = 1 + f^2(x)$, donc f vérifie l'équation différentielle $(\star)$.

2) Pour $x \in I$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x)$ car $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire. Donc f est impaire.

3) f admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car f est de classe C^3 en 0. De plus comme f est impaire, le développement limité de f ne comporte que des puissances en x impaires, d'où $\boxed{f(x) = a_1x + a_3x^3 + \circ(x^3) \text{ avec } a_1, a_3 \in \mathbb{R}.}$

4) f' est de classe C^2 en 0, donc f' admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et ce développement limité est égal à la dérivée du développement limité de f, d'où $\boxed{f'(x) = a_1 + 3a_3x^2 + \circ(x^2).}$

5) a_1 est le coefficient d'ordre 1 du développement limité de f en 0 donc $a_1 = f'(0)$. Donc $a_1 = 1 + \tan^2(0) = 1 + 0$, i.e. $\boxed{a_1 = 1}$.

6) D'après l'équation différentielle $(\star)$, on a

$$a_1 + 3a_3x^2 + \circ(x^2) = 1 + \left(a_1x + a_3x^3 + \circ(x^3)\right)^2 \quad (1).$$

On développe le membre de droite de l'égalité précédente et on s'arrête à l'ordre 2 pour correspondre à l'ordre 2 du membre de gauche de l'égalité (1) : $\left(a_1x + a_3x^3 + \circ(x^3)\right)^2 = a_1^2x^2 + 0 + \circ(x^2)$ Donc, en reportant dans (1), on a

$$a_1 + 3a_3x^2 + \circ(x^2) = 1 + a_1^2x^2 + \circ(x^2).$$

Donc, par unicité du développement limité de f' en 0, on a $\left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ 3a_3 & = a_1^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ 3a_3 & = 1 \end{array}\right.$. On résout le système et on trouve $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}$, donc le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 est donné par $\boxed{f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \circ(x^3).}$

Exerice 2 : Fonctions vectorielles.

Question 1 : En dérivant cordonnées par cordonnées on obtient $\vec{F}'(t) = \left(-2t, \frac{4}{t^2}\right)$. Donc, en utilisant la définition du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) &= (1-t^2) \times (-2t) + \left(1 - \frac{4}{t}\right) \times \left(\frac{4}{t^2}\right) \\
&= -2t + 2t^3 + \frac{4}{t^2} - \frac{16}{t^3} \\
&= \frac{2(-t^4 + t^6 + 2t - 8)}{t^3}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 2\,\frac{t^6 - t^4 + 2t - 8}{t^3}.}$

Question bonus : Par définition $||\vec{G}(t)|| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, donc

$$||G(t)||' = \frac{2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t))}{2\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}.$$

De même $\vec{G}(t) \cdot \vec{G}'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$, donc

$$\frac{\vec{G}(t) \cdot \vec{G}'(t)}{||\vec{G}(t)||} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}.$$

D'où l'égalité recherchée : $\boxed{||G(t)||' = \frac{\vec{G}(t) \cdot \vec{G}'(t)}{||\vec{G}(t)||}.}$