Contrôle continu 2 : développements limités et fonctions de plusieurs variables.
Mardi 16 Avril 2013

durée : 20 minutes. La calculatrice est inutile ici.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Le but est de calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

1. Montrer que $\forall x \in I, f'(x) = 1 + \tan^2(x)$. En déduire que f vérifie l'équation différentielle
$$y'(x) = 1 + y^2(x). \quad (\star)$$
2. Montrer que f est impaire (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$).
3. Justifier que f admet un développement limité d'ordre 3 en 0 de la forme $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \circ(x^3)$ avec $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que f' admet un développement limité d'ordre 2 en 0 puis montrer qu'il s'écrit $f'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 + \circ(x^2)$.
5. Quelle est la valeur de a_1 ?
6. À l'aide de l'équation différentielle $(\star)$, montrer que les coefficients du développement limité de f vérifie le système suivant : $\left\{ \begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ 3a_3 & = 1 \end{array} \right.$. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2

Question 1 : Soit la fonction $\vec{F}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\vec{F}(t) = \left(1 - t^2; 1 - \frac{4}{t}\right)$. Calculer $\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)$.

Question bonus : Soit la fonction $\vec{G}$ définie sur I par $\vec{G}(t) = (x(t); y(t))$. Montrer la formule $||\vec{G}(t)||' = \frac{\vec{G}(t) \cdot \vec{G}'(t)}{||\vec{G}(t)||}$.

Contrôle continu 2 : développements limités et fonctions de plusieurs variables.
Mardi 16 Avril 2013

durée : 20 minutes. La calculatrice est inutile ici.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Le but est de calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

1. Montrer que $\forall x \in I, f'(x) = 1 + \tan^2(x)$. En déduire que f vérifie l'équation différentielle
$$y'(x) = 1 + y^2(x). \quad (\star)$$
2. Montrer que f est impaire (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$).
3. Justifier que f admet un développement limité d'ordre 3 en 0 de la forme $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \circ(x^3)$ avec $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que f' admet un développement limité d'ordre 2 en 0 puis montrer qu'il s'écrit $f'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 + \circ(x^2)$.
5. Quelle est la valeur de a_1 ?
6. À l'aide de l'équation différentielle $(\star)$, montrer que les coefficients du développement limité de f vérifie le système suivant : $\left\{ \begin{array}{ll} a_1 & = 1 \\ 3a_3 & = 1 \end{array} \right.$. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2

Question 1 : Soit la fonction $\vec{F}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\vec{F}(t) = \left(1 - t^2; 1 - \frac{4}{t}\right)$. Calculer $\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)$.

Question bonus : Soit la fonction $\vec{G}$ définie sur I par $\vec{G}(t) = (x(t); y(t))$. Montrer la formule $||\vec{G}(t)||' = \frac{\vec{G}(t) \cdot \vec{G}'(t)}{||\vec{G}(t)||}$.