

Exercice 1 :

1) $\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ où $P(x, y) = x^2 - 2y$ et $Q(x, y) = y^2 - 2x$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -2$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -2$, donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$.

2) ω est fermée (et de classe C^1) sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé, donc, d'après le théorème de Poincaré, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$.

3) Comme ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$, l'intégrale curviligne de ω le long d'un arc γ joignant A à B ne dépend que des extrémités A et B , donc $\int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A)$ où f vérifie $df = \omega$. On admet que $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - 2xy$, on en déduit que $\int_{\gamma} \omega = f((1, 1)) - f((0, 1)) = \frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{3}$, donc $\int_{\gamma} \omega = -\frac{5}{3}$.

Exercice 2 :

Pour $t \in \mathbb{R}$, $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin^3(t))$ et $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$, $N(1, 0)$.

1) On cherche le premier vecteur dérivé non nul : $\vec{f}'(t) = (-\sin(t); 3\cos(t)\sin^2(t))$ donc $\vec{f}'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$. Comme $\vec{f}'(\frac{\pi}{4}) \neq (0, 0)$, alors $\vec{f}'(\frac{\pi}{4})$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ en M .

Pour le point N , $\vec{f}'(0) = (0, 0)$. On calcule $\vec{f}''(0)$: $\vec{f}''(t) = (-\cos(t), -3\sin^3(t) + 6\cos^2(t)\sin(t))$ donc $\vec{f}''(0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$, donc $\vec{f}''(0)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ en N .

2) En M , l'équation de la tangente à Γ est,

$$\left(y - y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) x' \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(x - x\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) y' \left(\frac{\pi}{4}\right),$$

donc $(y - \frac{\sqrt{2}}{4}) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \times (\frac{3\sqrt{2}}{4}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$. L'équation de la tangente à Γ en M est

$\frac{3}{2}x + y - \sqrt{2} = 0.$

En N , l'équation de la tangente à Γ est,

$$(y - y(0)) x''(0) = (x - x(0)) y''(0),$$

donc $(y - 0) \times (-1) = (x - 1) \times (0) \Rightarrow -y = 0$. L'équation de la tangente à Γ en N est $y = 0$.

Remarque : l'équation de la tangente est $ax + by + c = 0$. On peut utiliser les coordonnées des vecteurs directeurs déterminés en question 1 pour connaître les coefficients a et b , puis trouver c sachant que M (ou N) est sur la droite.

3) On cherche le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\vec{f}'(\frac{\pi}{4})$.

On a $\vec{f}''(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{6\sqrt{2}}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$, donc $\vec{f}'(\frac{\pi}{4})$ et $\vec{f}''(\frac{\pi}{4})$ sont colinéaires.

Calculons $\vec{f}'''(\frac{\pi}{4})$:

$$\vec{f}'''(t) = (\sin(t), -9\cos(t)\sin^2(t) - 12\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos^3(t)) = (\sin(t), -21\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos^3(t)).$$

Donc $\vec{f}'''(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{21\sqrt{2}}{4} + \frac{6\sqrt{2}}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{15\sqrt{2}}{4})$. Donc $\vec{f}'(\frac{\pi}{4})$ et $\vec{f}'''(\frac{\pi}{4})$ ne sont pas colinéaires, on a p impair et q impair donc M est un point d'inflexion.

On cherche le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\vec{f}''(0)$.

Donc $\vec{f}'''(0) = (0, 6)$ est non colinéaire à $\vec{f}''(0) = (-1, 0)$, on a p pair et q impair donc

N est un point de rebroussement de première espèce.