Calcul de puissances de développements limités

Je vous propose une façon plus "automatique" de calculer des puissances du genre :

$$\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2 \text{ et } \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3.$$

Ces puissances se trouvent dans le sujet du DL. Cela vous permettra de gagner du temps dans la rédaction (moins de calculs au brouillon) et de faire aussi moins d'erreurs. Bien entendu, il faut s'entraîner...

Il s'agissait de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$.

On a $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$ (composition de e^x par $-x$) et $\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \circ(x^3)$ (c'était la question 1 de l'exercice). Donc

$$\ln(1+e^{-x}) = \ln\left(1+\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)\right) = \ln\left(2+\left[-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right]\right).$$

En notant $u(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$, on a bien $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, donc on peut utiliser le DL en 0 de $\ln(2+x)$ en "remplaçant" le x par u (c'est une composition). Donc

$$\ln(1+e^{-x}) = \ln(2) + \frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3 + \circ(x^3). \qquad (1)$$

Il faut maintenant calculer les puissances $\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2$ et $\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3$.

Pour cela, on va développer les produits de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \circ(x^3) &= \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3)\\ &= -x \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\\ &\quad - \frac{x^3}{6} \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3).\end{aligned}$$

N'oubliez pas le $\circ(x^3)$ qui vous permet maintenant de ne pas calculer tous les termes !

$$\begin{aligned}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \circ(x^3) &= \left[x^2 - \frac{x^3}{2}\right] + \left[-\frac{x^3}{2}\right] + 0 + \circ(x^3)\\ &= x^2 - x^3 + \circ(x^3).\end{aligned}$$

Maintenant, on calcule $\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3$ en se servant du calcul précédant. En effet,

$$\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3 = \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^2 \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right),$$

donc on fait un produit de développements limités :

$$\begin{aligned}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)^3 + \circ(x^3) &= (x^2 - x^3) \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3)\\ &= x^2 \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) - x^3 \times \left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3)\\ &= \left[-x^3\right] + 0 + \circ(x^3).\end{aligned}$$

Il reste maintenant à revenir à l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\ln(1+e^{-x}) &= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}(x^2 - x^3) + \frac{1}{24}(-x^3) + \circ(x^3)\\ &= \ln(2) - \frac{x}{2} + x^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) + x^3\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right) + \circ(x^3).\end{aligned}$$

On en déduit que, au voisinage de 0, $\boxed{f(x) = \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \circ(x^3).}$