Correction du DM sur les développements limités

Exercice 1

1) On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$.
Or $\ln(2+x) = \ln\left(2(1+\frac{x}{2})\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$, donc

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \circ(x^n) \qquad \text{(composition)}\\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n2^n} + \circ(x^n)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n2^n} + \circ(x^n).}$

2) On considère f définie par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$.
On a $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$ (composition de e^x par $-x$) donc, par composition et en utilisant la question 1), on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(1+e^{-x}) &= \ln\left(1 + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\right) = \ln\left(2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)\\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \circ(x^3)\\ &= \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}\left(x^2 - 2\frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{24}\left((-x)^3\right) + \circ(x^3)\\ &= \ln(2) - \frac{x}{2} + x^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + x^3\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) + \circ(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit que, au voisinage de 0, $\boxed{f(x) = \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \circ(x^3).}$

3) On déduit du développement limité de f en 0 de la question 2) l'équation de la tangente au graphe de f en 0 :

$$\boxed{y = \ln(2) - \frac{x}{2}.}$$

Pour la position de la courbe représentant f par rapport à la tangente, on regarde le signe de la différence $f(x) - y$, c'est-à-dire : $f(x) - \left(\ln(2) - \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{8} + \circ(x^3)$. Au voisinage de 0, on a $\frac{x^2}{8} \geq 0$, donc <u>le graphe de f est au-dessus de la tangente</u>.

Exercice 2

On veut un développement limité à l'ordre 4 de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$.
On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$ et que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \circ(x^4)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}g(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right) + \circ(x^4)\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^2}{2}\left(1 + x + x^2\right) + \frac{x^4}{24} \times (1) + \circ(x^4)\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0, $\boxed{g(x) = \frac{\cos(x)}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24}x^4 + \circ(x^4).}$

Exercice 3

1) On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$ et que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^2)$. Donc, par somme,

$$\begin{aligned}\sin(x) - x\cos(x) &= x - \frac{x^3}{6} - x \times \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^2)\right) + \circ(x^3)\\ &= x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\\ &= \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$. Par ailleurs, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$, donc par composition, on a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \circ(x^4)$, d'où $x\ln(1+x^2) = x^3 + x^3\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$ (on s'arrête à l'ordre 3 ici).

Donc, par quotient,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\ln(1+x^2)} &= \frac{\frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)}{x^3 + x^3\epsilon_2(x)}\\ &= \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)}\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$. Donc, par quotient de limites : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\ln(1+x^2)} = \frac{1}{3}.}$

2) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$, donc au voisinage de $+\infty$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \circ(\frac{1}{x^3})$. On en déduit que, au voisinage de $+\infty$,

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 = x^2 - \frac{1}{6} - x^2 + \circ(1) = -\frac{1}{6} + \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0.$$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 = -\frac{1}{6}.}$

Exercice 4

On considère f définie par $f(x) = (x+2)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Par composition, f est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x+2}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc le signe de f' dépend du signe de $x^2 - x - 2$. Or $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ (1 est racine évidente). D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
f'		+	0	$-$	‖	$-$	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$4e^{\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le calcul des limites aux bornes du domaine de définition est laissé au lecteur : il suffit de connaitre les limites de $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour l'équation de l'asymptote, on détermine le développement jusqu'à l'ordre 1 en $\frac{1}{x}$ en $\pm\infty$:
Au voisinage de $+\infty$, $\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \circ(\frac{1}{x^3})$. Donc, par produit : $(x+2)\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 3 + x + \frac{5}{2x} + \circ(\frac{1}{x})$.

On déduit de ce développement que l'équation de l'asymptote oblique est $y = x + 3$ et on a $f(x) - (x+3) = \frac{5}{2x}$. Donc la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique est déterminée par le signe de $\frac{5}{2x}$ au voisinage de $+\infty$ et en $-\infty$. Au voisinage de $+\infty$, $\frac{5}{2x} > 0$ donc la courbe représentant f est au-dessus de l'asymptote, et au voisinage de $-\infty$, $\frac{5}{2x} < 0$ donc le graphe de f est en-dessous de l'asymptote.