Université Bordeaux 1 Année 2012/2013
Parcours MISMI DOM PHY. ING. Code UE: Q1MI2M21
Solution du DS terminal de Math.

Solution de l'exercice 1
1. D'après le théorème de composition des développements limités

$$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{1}{2!}(x+x^2)^2 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3).$$

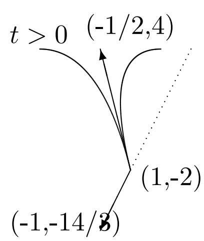
2. D'après le théorème de produit des développements limités

$$\begin{aligned}(x-1)\big(2+\ln(1+2x)\big) &= (x-1)(2+2x-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3}(2x)^3)+o(x^3)\\ &= 2x+2x^2-2x^3-2-2x+2x^2-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\\ &= -2+4x^2-\frac{14}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

3. D'après les calculs précédents

$$\big(x(t),y(t)\big) = (1,-2)+(-1/2,4)t^2+(-1,-14/3)t^3+o(t^3). \qquad (0.1)$$

En particulier, $x'(0) = y'(0) = 0$ donc 0 est bien un point stationnaire.
4. D'après la question 3, on a un point de rebroussement de première espèce ($p=2$, $q=3$ dans les notations du poly).



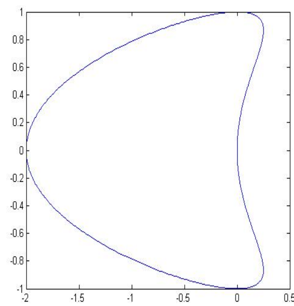
Solution de l'exercice 21. $2\cos(t) > 1$ si et seulement si $\cos(t) > 1/2 = \cos(\pi/3)$. Comme cos est décroissante sur $[0,\pi]$ ceci équivaut à $0 \leq t < \pi/3$.**2.** Comme $x(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) - \cos(t+2\pi)^2 = \cos(t) - \cos(t)^2 = x(t)$ et $y(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin(t) = y(t)$, x et y sont 2π-périodiques . On peut donc restreindre l'étude à n'importe quel intervale de longueur 2π, disons $]-\pi,\pi]$.

Comme $x(-t) = \cos(-t) - \cos(-t)^2 = \cos(t) - \cos(t)^2 = x(t)$ et $y(-t) = \sin(-t) = -\sin(t) = -y(t)$ on peut restreindre l'étude à $[0,\pi]$, le restant de la courbe s'en déduit par une symétrie d'axe Ox.

3. $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t)\sin(t) = \sin(t)\big(2\cos(t)-1\big)$ et sur $]0,\pi[$, $\sin(t) > 0$, on déduit le signe de x' de la question 1. Par ailleurs, $y'(t) = \cos(t)$. Le tableau de variation est donc donné par

t	0		$\pi/3$		$\pi/2$		π
$x'(t)$	0	+	0	-	-1	-	0
			$\frac{1}{4}$				
$x(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	
	0						-2
$y'(t)$	1	+	$\frac{1}{2}$	+	0	-	-1
					1		
$y(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	
	0						0

4. La courbe admet une tangente horizontale si $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ donc pour $t = \pi/2$ *i.e.* au point $(0,1)$. La courbe admet une tangente verticale si $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ donc pour $t = 0$, $t = \pi/3$ et $t = \pi$ soit aux points $(0,0)$, $(1/4, \sqrt{3}/2)$ et $(-2, 0)$.
5. On en déduit la courbe



Solution de l'exercice 3
1. Écrivons pour $i = 1, 2$ $\omega_i(x,y) = P_i(x,y)\,\mathrm{d}x + Q_i(x,y)\,\mathrm{d}x$ avec

$$P_1(x,y) = 2xy + 1, \quad Q_1(x,y) = x^2 + 2y, \quad P_2(x,y) = x^2 \quad \text{et} \quad Q_2(x,y) = 2xy.$$

Comme $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$ ω_1 est fermée. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, d'après le théorème de Poincaré, ω_1 est exacte sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions cela directement. On cherche $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2xy + 1$. On en déduit qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f_1(x,y) = x^2y + x + g(y)$. On veut de plus que $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$ soit $x^2 + g'(y) = x^2 + 2y$. Ainsi $g'(y) = 2y$ et $g'(y) = y^2$ convient. On vérifie qu'on a bien $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$ avec $f_1(x,y) = x^2y + x + y^2$.

Par ailleurs, $\dfrac{\partial P_2}{\partial y} = 0 \neq 2y = \dfrac{\partial Q_2}{\partial x}$ donc ω_2 n'est pas fermée. A fortiori, elle n'est pas exacte.
2. La courbe γ est paramétrée par $\big(x(t), y(t)\big) = (2\cos t, 2\sin t)$, t allant de 0 à $\pi/2$. Donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega_2 &= \int_0^{\pi/2} (2\cos^2(t) \times \underbrace{(-2\sin(t))}_{x'(t)} + 8\cos(t)\sin(t) \times \underbrace{2\cos(t)}_{y'(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{8}{3}[\cos(t)^3]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

3. Comme ω_1 est exacte, $\omega_1 = \mathrm{d}f_1$, $\displaystyle\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \mathrm{d}f_1 = f_1(0,2) - f_1(2,0) = 4 - 2 = 2.$