

EXERCICES 1 - DÉRIVÉES

Exercice 1 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

(1) $f(x) = (3x^2 + 7) \ln(x)$

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^4 + 8}$

(4) $f(x) = \ln(7 - x^2)$

(5) $f(x) = 3x^2 \ln(x)$

(6) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Exercice 2 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions goniométriques suivantes:

(1) $f(x) = \cos(2 - x)$

(2) $f(x) = (\sin(x) + 3)^4$

(3) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

(4) $f(x) = \arccos(\arctan(x))$

(5) $f(x) = 5 \cos^2(x) - 4 \sin(x) \cos(x) - 5 \sin^2(x) + 2 \sin(2x)$ (Bac Sciences Italie 2012)

Exercice 3 Calcul de dérivées

(1) Soient n, m deux entiers. Calculer la dérivée de $f(x) = \sin^n(x) \cdot \cos^m(x)$.

(2) Calculer la dérivée de $g(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}$.

(3) En appliquant le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, montrer que pour tout réel x ,

$$\operatorname{Arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Calculer la dérivée de $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Que peut-on en conclure.

Exercice 4 Calcul de dérivées successives

(1) Soit $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$ (pour $x > 0$). Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer la dérivée d'ordre k (entier) de $g(x) = x^n$.

- (3) Déterminer la dérivée d'ordre n de $h(x) = e^{2x}$.
- (4) Déterminer la dérivée d'ordre n de $l(x) = \frac{1}{1+x}$ et de $m(x) = \frac{1}{1-x}$.
- (5) Déterminer la dérivée d'ordre n de $p(x) = \ln(1+x)$.
- (6) Montrer que la dérivée d'ordre n de $\sin(x)$ est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 5 Formule de Leibniz

- (1) Calculer la dérivée d'ordre $n \geq 3$ de $f(x) = x^3 \sin(x)$.
- (2) Calculer la dérivée d'ordre $n \geq 2$ de $g(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$.
- (3) On note $P(x)$ un polynôme. Calculer $(P(x)e^{2x})^{(4)}$.

Exercice 6 Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. En déduire les valeurs de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Déterminer les coefficients du polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, en sachant que $P(0) = P(1) = -1$, $P'(0) = -1$ et $P''(0) = 10$.

Exercice 8 Calcul de limites en utilisant les dérivées

Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$