Exercices chapitre 2 : Accroissements finis et Formules de Taylor

mardi 12 et 19 février 2013

Exercices : Extrema d'une fonction

Exercice 1 :
Soit f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x - 2\sin(x)$. Déterminer les extrema de f sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 2 :
La vitesse d'une navette spatiale a été modélisée depuis son décollage, à l'instant $t = 0$, jusqu'au largage des fusées, à l'instant $t = 126$ par la fonction

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pieds par seconde). Déterminer les valeurs maximales et minimales de l'accélaration entre le décollage et le largage des fusées.

Exercice 3 :
On tire un objet de poids P sur un plan horizontal à l'aide d'une corde à laquelle est appliquée une force. Si θ désigne l'angle que fait la corde avec le plan, alors, à la limite de glissement, l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

où μ est une constante positive appelée *cœfficient de friction* et où $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
Démontrer que F est minimale lorsque $\tan\theta = \mu$.

Exercices 4 : Dressez le tableau de variation en précisant les extrema locaux et globaux des fonctions définies par :

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad f_2(x) = x + \frac{4}{x}, \quad f_3(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}, \quad f_4(x) = \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right).$$

Exercices : Théorème des accroissements finis

Exercice 5 :
Le compteur d'une voiture indique à 14h, 30 km/h. Dix minutes plus tard il indique 50 km/h. Démontrer qu'à un certain moment entre ces deux mesures l'accélération est exactement de 120 km/h^2.

Exercice 6 :
Montrer que pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7 :
Montrer que pour tout réel x : $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 8 :
Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\sin(x) \leq x$.

Exercice 9 :
Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 10 :
Encadrer $\sqrt{105}$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

Exercices : Formules de Taylor

Exercice 11 :
Montrer que pour tout réel x :
$$|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2!}, \qquad \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)\right| \leq \frac{x^4}{4!}, \qquad \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

Exercice 12 :
Montrer que pour tout réel x : $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

Exercice 13 :

1. Ecrire la formule de Taylor au point 0 et à l'ordre 9 pour la fonction sinus.
2. Soit $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$. Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $P(x) \leq \sin x \leq P(x) + \frac{x^9}{9!}$.
3. Trouver un nombre $a > 0$ tel que $|\sin x - P(x)| \leq 10^{-5}$ pour tout réel $x \in [0, a]$.
4. Soit θ un angle dans $[0, 5°]$. Quelle est l'erreur maximale commise quand on dit : $\sin\theta \sim \theta$?

Exercice 14 :
Soit un réel $x \in [0, 1]$. Estimer l'erreur de l'approximation de $\sqrt{1+x}$ par : $1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 15 :

1. Approcher la fonction $x^{1/3}$ par un polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 8$.
2. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $7 \leq x \leq 9$?

Exercice 16 :
Ecrire $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ sous la forme d'une somme de puissances de $(x + 1)$.

Exercice 17 :
Etablir les inégalitées suivantes :

1. $\forall x \geq 0\,,\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
2. $\forall x \geq 0\,,\; \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\; e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 18 :
Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$ tel que :$P(2) = P'(2) = \cdots = P^{(n)}(2) = 5$.
Montrer que ce polynôme n'a pas de racine dans $[2, +\infty[$.

Exercice 19 :

1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$, montrer que u_n converge vers $\ln 2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Exercices extraits d'annales

Exercice 1 session 2 printemps 2008 :

1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$.
2. Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Montrer que $0 \leq \frac{1 - \cos(x)}{x} \leq \sin(x)$.

Exercice 67 DS avril 2012 :
On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty)$ par $f(x) = \frac{xe^{-2x}}{2 + x}$.

1. Donnez le tableau de variation de f.
2. En déduire les extrema locaux et globaux de f sur $[0, +\infty)$. (on précisera leur nature).