EXERCICES 4 - FONCTIONS VECTORIELLES

Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 Bases de $\mathbb{R}^2$

1. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $\vec{t} = (6, 15)$, $\vec{s} = (2, 5)$. Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, 3)$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit A le point de coordonnées $(3, -1)$ dans la base canonique, exprimer ses cordonnées en fonction de la base trouvée au point 2.

Exercice 2 Bases de $\mathbb{R}^3$

Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, 1), \vec{w} = (1, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Fonctions vectorielles

Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux fonctions vectorielles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\vec{F}(t) = \cos(t) \cdot \vec{i} + \sin(t) \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k} \qquad \vec{G}(t) = \cos(t) \cdot \vec{i} - \sin(t) \cdot \vec{j} - 2t \cdot \vec{k}$$

Déterminer $\vec{F} + \vec{G}$, $3\vec{F}$, $\vec{F}.\vec{G}$, $\|\vec{F} + \vec{G}\|$, $\vec{F} \wedge \vec{G}$.

Exercice 4 Limites et dérivées de fonctions vectorielles

Soit $\vec{F} : t \longmapsto \left(\cos(t), \dfrac{\sin(t)}{t}, te^{2t}\right)$.

1. Montrer que $\vec{F}$ admet une limite en 0.
2. Montrer que $\vec{F}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\vec{F}'$.
3. Exprimer les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base de $\mathbb{R}^3$ trouvée dans l'exercice 2.

Exercice 5 Limites de fonctions vectorielles

Déterminer la limite de la fonction vectorielle

$$\vec{F}(t) = \left(\frac{\cos(t)}{\sinh(t)}, \frac{\sin(t)}{\sinh(t)}, \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\right)$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 6 Vecteurs orthogonals et dérivées de fonctions vectorielles

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{F}(t) = \cos(t) \cdot \vec{i} + \sin(t) \cdot \vec{j}.$$

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{F}'(t)$ est un vecteur de norme 1, orthogonal à $\vec{F}(t)$.
2. Déterminer les dérivées successives de $\vec{F}$.

Exercice 7 Dérivées de fonctions vectorielles

Soient

1. $\vec{F}(t) = t \cdot \vec{i} - t^2 \cdot \vec{j}, \qquad \vec{G}(t) = \frac{1}{t} \cdot \vec{i} + \frac{1}{t^2} \cdot \vec{j};$
2. $\vec{F}(t) = e^t \cdot \vec{i} + 2\cos(t) \cdot \vec{j}, \qquad \vec{G}(t) = \frac{1}{\cos(t)} \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j};$
3. $\vec{F}(t) = \ln(t) \cdot \vec{i} + t^4 \cdot \vec{j}, \qquad \vec{G}(t) = t^2 \cdot \vec{i} + \frac{1}{t^3} \cdot \vec{j}.$

Déterminer, pour chaque point, l'ensemble de definition et les dérivées de $\vec{F} + \vec{G}$, $\vec{F}.\vec{G}$, $\|\vec{F}\|$.

Exercice 8 Dérivées de fonctions vectorielles

Soient $\vec{F}(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \vec{i} - \frac{1}{t^3} \cdot \vec{j}$, $k(t) = t^2$. Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées des fonctions $k \cdot \vec{F}$ et $\vec{F} \circ k$.

Exercice 9 Développement de Taylor de fonctions vectorielles

Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$ des fonctions vectorielles suivantes:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= \left(\sin(t), t \cdot \sin(t), t^2 \cdot \sin(t)\right), \\ \vec{G}(t) &= \left(e^t, \cos(t), e^t \cdot \cos(t)\right), \\ \vec{H}(t) &= \left(\tan(t), t^3, 2 + 3t^4\right). \end{aligned}$$

Exercice 10 Fonctions vectorielles

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\vec{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle dérivable sur I quelconque. On peut donc voir $\vec{F}(t)$ définie par ses fonctions cordonnées $(f_1(t), f_2(t))$, pour tout $t \in I$.
Pour $t \in I$ on note $g(t) := \|\vec{F}(t)\|^2$.

1. Montrer que $g'(t) = 2\vec{F}'(t).\vec{F}(t)$.
2. Si $\|\vec{F}(t)\|$ est constant que peut-on dire du vecteur $\vec{F}'(t)$?