EXERCICES 5 - ARCS PLANS PARAMÉTRÉS

Exercice 1 (Points doubles)

Montrer que la courbe définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^3 + 2t^2 - t + 1 \\ y(t) &= 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

possède un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

Exercice 2 (Allure locale)

Construire les courbes des arcs suivants au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^5 + t^6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^6 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2 + t^5 + t^6 \end{cases}$$

Exercice 3 (Allure locale)

Donner l'allure de la courbe au voisinage du point de paramètre $t = 0$ de la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{\cos t} \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

Indication : on peut utiliser les développements limités pour déterminer les dérivées successives.

Exercice 4 (Points singuliers et allure locale)

Déterminer les points singuliers et l'allure de la courbe au voisinage de ces points des arcs paramétrés suivants :

$$\begin{cases} x(t) = t^4 + 1 \\ y(t) = t^4 - 2t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

Exercice 5 (Branches infinies)

Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{t^2 - 1} \\ y(t) &= \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$$

Exercice 6 (Branches infinies)

Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \tan(t)+\sin(t) \\ y(t) &= 1/\cos(t) \end{cases}$$

Exercice 7 (Branches infinies)

Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y(t) &= \dfrac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$$

Exercice 8 (Étude d'un arc paramétré) On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t)=(t+2)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t)=(t-2)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$

1. Donner le tableau de variation.
2. Etudier les branches infinies.
3. Montrer qu'au point $O=(0,0)$ on a une demi tangente.
4. Tracer la courbe.

Exercice 9 (Étude d'un arc paramétré)

On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=1-cost \end{cases}$

1. Que peut-on dire des points $M(t)$ et $M(-t)$? $M(t)$ et $M(t+2\pi)$?
2. Étudier et construire la courbe lorsque $t\in[0,\pi]$, puis pour $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 10 (Étude d'un arc paramétré)

On considère la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t \end{cases}$

1. Que peut-on dire des points $M(t+2\pi)$, $M(-t)$, $M(\pi-t)$, $M(\frac{\pi}{2}-t)$ par rapport au point $M(t)$.
2. Étudier et construire la courbe lorsque $t\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$, puis pour $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 (Étude d'un arc paramétré)

On considère la courbe C définie paramétriquement, sur $\mathbb{R}^{\times}$, par $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{t^2}-2t \\ y(t)=t^2-\dfrac{2}{t} \end{cases}$

1. Calculer $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$. En déduire que C admet un axe de symétrie.
2. Étudier et construire C.