Exercices chapitre 6 : Formes Différentielles
mardi 14 Mai et mardi 21 Mai 2013

Calcul de dérivées partielles

Exercice 1 : Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 1, \quad f_3(x) = x^2 + 3, \quad f_4(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad f_5(x,y) = ye^2x^2,$$
$$f_6(x,y) = e^{\frac{x}{y}}, \quad f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad f_9(x,y) = \cos(\pi xy), \quad f_{11}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}.$$

Exercice 2 : Calculer les primitives des fonctions suivantes selon la variable demandée :

$$f_1(x,y) = y \text{ en } x, \qquad f_2(x,y) = xy \text{ en } y, \qquad f_3(x) = -x^2 \text{ en } y,$$
$$f_4(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ en } x, \qquad f_5(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ en } y, \qquad f_6(x,y) = xe^{x^2+y} \text{ en } x$$

*Exercice 3** : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||(x,y)|| = \max(|x|;|y|)$. On sait que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

1. Montrer, en justifiant, que $|f(x,y)| \leq \dfrac{||(x,y)||^4}{||(x,y)||^2}$. En déduire que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculer, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en utilisant la définition du cours. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{y^6 + 6y^4x^2 - 3y^2x^4}{(x^2+y^2)^3}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{y^6 + 7y^4x^2 - 6y^2x^4}{(x^2+y^2)^3}$.
   Toujours à l'aide de la définition du cours, montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. Qu'en déduit-on ?

Formes différentielles

Exercice 4 : Calculs de formes différentielles :
1) Soit f l'application définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Déterminer la différentielle de f sur U.
2) Soit g l'application définie sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $g(x,y) = \arctan(\dfrac{y}{x})$. Déterminer la différentielle de g sur U.
3) Déterminer la différentielle en $A(1,1)$ de f définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Comparer $f(1.02, 1.01) - f(1,1)$ et $d_{(1,1)}f(0.02, 0.01)$.
Exercice 5 :

1. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = ydx + xdy$ est fermée.
   Montrer que ω est exacte sur U et déterminer ses primitives
2. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = xdx + ydy$ est fermée.
   Montrer que ω est exacte sur U et déterminer ses primitives
3. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = ydx - xdy$ n'est pas exacte.
4. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $\omega(x,y) = \dfrac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$ est fermée.
   Montrer qu'elle est exacte sur U.
5. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{y = 0\}$ par $\omega(x,y) = \dfrac{1}{y^3}\left[(3x^2+y^2)ydx - 2x^3dy\right]$ est fermée. Montrer qu'elle est exacte sur U.
6. Montrer que la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $\omega(x,y) = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ est fermée mais qu'elle n'est pas exacte sur U.

Intégrales curvilignes

Exercice 6 : DS 2008 : On considère la forme différentielle $\omega(x,y) = \dfrac{2x}{y}\,dx - \left(\dfrac{x^2}{y^2} + 2y\right)\,dy$ définie sur $U = \{(x,y)$ tels que $y > 0\}$.

1. Montrer que ω est fermée sur U. La forme ω est-elle exacte sur U ? Justifier la réponse.
2. Trouver une fonction f telle que $df = \omega$.
3. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$ où γ est une courbe d'origine $A(1,1)$ et d'extrémité $B(6,3)$.

Exercice 7 : DST 2009 : On considère la forme différentielle $\omega(x,y) = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$. La forme ω est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.
2. Trouver une fonction f telle que $df = \omega$.
3. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$ où γ est une courbe d'origine $A(0,0)$ et d'extrémité $B(1,1)$.

Exercice 6 : Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $3ydx - 4x^2ydy$ sur γ, où γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points $(-1,0)$ à $(0,3)$, $(0,3)$ à $(3,-3)$ et $(3,-3)$ à $(3,-5)$.

Exercice 7 : Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $2xydx + (x^2+3)dy$ sur γ dans les 2 cas suivants :

1. γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points $A(-1,0)$ à $B(0,3)$, B à $C(3,-3)$.
2. γ est la courbe orientée formée des segments qui joignent les points A à B, B à C et C à A.

Exercice 8 :

1. Calculer $I = \displaystyle\int_C (2x-y)dx + (x+y)dy$ où C est le cercle de centre $O(0,0)$ de rayon R décrit dans le sens direct à partir du point $A(R,0)$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_C (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$ où C est la courbe constituée des deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct. On calculera l'intégrale curviligne le long de ces deux arcs d'extrémités $O(0,0)$ et $A(1,1)$.

Exercice 9 :

Calculer l'intégrale curviligne (la circulation) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $\overrightarrow{V}(x,y) = (y,-x)$ sur le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

Exercices à préparer pour le mardi 28 Mai

Exercice 1 : forme différentielle

On considère γ la courbe fermée du plan constituée de l'arc de parabole $y = x^2$ et de la portion de droite d'équation $y = x$ joignant les points $O(0,0)$ et $A(1,1)$ et parcourue dans le sens direct.
Soient ω_1 et ω_2 les formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega_1(x,y) = 2xy\,dx + (2x + y^2)\,dy,$$
$$\omega_2(x,y) = 2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy.$$

1. Les formes différentielles ω_1 et ω_2 sont-elles fermées sur $\mathbb{R}^2$? Sont-elles exactes sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \omega_1$.
3. Que vaut $\displaystyle\int_\gamma \omega_2$?

Exercice 2 : courbe paramétrée

On considère la courbe paramétrée définie par $\left\{\begin{array}{ll} x(t) & = t - \sin(t) \\ y(t) & = 1 - \cos(t) \end{array}\right.$.

1. Que peut-on dire des points $M(t)$ et $M(-t)$? Et du point $M(t+2\pi)$?
   Qu'en déduit-on pour l'étude de la courbe paramétrée ?
2. Etudier et construire la courbe pour $t \in [0,\pi]$.