

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014 DS DE PRINTEMPS PARCOURS : MI202 Code UE : Q1MI2M21 Epreuve : Mathématiques Date : 18/04/2014 Heure : 14h00 Durée : 1h30 Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Thiéry	Collège Sciences et technologies
---	---	--

Exercice 1

- (i) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange pour f avec $n = 4$.
- (ii) On suppose maintenant que $a = 0$, $b > 0$ et $f(x) = \exp(x)$. Expliciter la formule précédente dans ce cas et en déduire que

$$\left| \exp(b) - \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6}\right) \right| \leq \exp(b) \frac{b^4}{24}.$$

- (iii) On suppose de plus que $b = \frac{1}{2}$. En utilisant (ii), déterminer une approximation de $\exp(\frac{1}{2})$.
- (iv) En admettant que $\exp(\frac{1}{2}) \leq 2$, déterminer un majorant de l'erreur commise ?

Exercice 2

- (i) Déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{(\sin(x))^2}$.
- (ii) Déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+x} - \exp(-x)}{x^3}$.
- (iii) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $x_0 = 0$ de $\log(1 + \sin(x))$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(x)) + \exp(-x) - 1}{x^4}$.

Exercice 3

On pose $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On admet qu'il existe une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$(E) \quad \forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{1 + f(x)} \text{ et } f(0) = 0.$$

En particulier, on admet que pour tout $x \in I$, $f(x) \neq -1$. On ne cherchera pas à déterminer explicitement f .

- (i) Montrer que f' est dérivable sur I . En répétant le raisonnement, montrer que f est au moins 4 fois dérivable sur I .
- (ii) Pourquoi f admet-elle un développement limité d'ordre 4 en 0. On notera $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x)$ ce développement limité.
- (iii) Que vaut a_0 ? Déduire $f'(0)$ à l'aide de l'équation (E). En déduire a_1 ?
- (iv) Pourquoi f' admet-elle développement limité d'ordre 3 en 0 et pourquoi vaut-il $f'(x) = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + x^3\varepsilon(x)$?
- (v) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+f(x)}$ en fonction de a_2, a_3 et a_4 .
- (vi) En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4 .

Fin