Juin 2014, $\omega_1(x,y) = y\,dx + 2xy\,dy$ et $\omega_2(x,y) = y^2\,dx + 2xy\,dy$

1) • On note $P_1(x,y) = y$ et $Q_1(x;y) = 2xy$ sur $U = \mathbb{R}^2$

P_1 et Q_1 sont des fonctions polynomiales donc de classe C^∞ sur U.

En particulier ω_1 est de classe C^1 sur U

• On a $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x;y) = 1$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial x}(x;y) = 2y$ pour $(x;y) \in U$.

Donc ω_1 n'est pas fermée et par conséquent ω_1 n'est pas exacte sur U

•• On note $P_2(x,y) = y^2$ et $Q_2(x,y) = 2xy$

Comme précédemment, ω_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\frac{\partial P_2}{\partial y}(x,y) = 2y$ et $\frac{\partial Q_2}{\partial x}(x,y) = 2y$

Donc ω_2 est fermée sur U et, comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, on déduit du théorème de Poincaré que ω_2 est exacte sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit f de classe C^1 telle que $df = \omega_2$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P_2(x;y) = y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q_2(x;y) = 2yx$.

Donc $f(x;y) = \int P_2(x,y)\,dx = y^2 x + g(y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q_2(x;y) \iff 2y \cdot x + g'(y) = 2yx$

$\iff g'(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$

$\iff g(y) = C \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x;y) = y^2 x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

3) γ arc paramétré par $\begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t^3;t^2) \end{array}$

On note A l'origine de γ : A : $(0;0)$ et d'extrémité B : $(1;1)$

Comme ω_2 est exacte sur $\mathbb{R}^2$, $\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma df = f(B) - f(A)$

Donc $\int_\gamma \omega_2 = f(1;1) - f(0;0) = 1 - 0 = 1$. $\boxed{\int_\gamma \omega_2 = 1}$

4) $\int_\gamma \omega_1 = \int_0^1 P_1(t^3; t^2) \times (3t^2) + Q_1(t^3; t^2) \times (2t) \; dt$

$= \int_0^1 t^2 \times (3t^2) + 2t^5 \times (2t) \; dt = \int_0^1 3t^4 + 4t^6 \; dt$

$= \left[\frac{3}{5} t^5 + \frac{4}{7} t^7 \right]_0^1 = \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - 0$

Donc $\boxed{\int_\gamma \omega_1 = \frac{41}{35}}$