Contrôle continu 1 : rattrapage mardi 10 mars 2015

Durée : 25 minutes. La calculatrice de l'Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document autorisé.

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : DS 2012 (allégé).

1. Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
2. Soit $x \geq 0$, montrer l'inégalité $1 - x + x^2 - x^3 \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{(1+x)^4}$.
3. À partir de la question 2, trouver un réel a (le plus grand possible) tel que l'inégalité $\left|f(x) - (1 - x + x^2)\right| \leq 10^{-4}$ soit satisfaite pour tout $x \in [0, a]$.

Correction du CC 1 (rattrapage)

Exercice 1. 1) Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2) On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et dérivable sur $]-1; +\infty[$. Soit $x > 0$, f est continue sur $[0; x]$, dérivable sur $]0; x[$; on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]0; x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$. Comme $\forall x > -1, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, on a donc $\sqrt{1+x} - 1 = x\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}$. On a

$$\begin{aligned}
0 < c < x &\Rightarrow 1 \leq 1 + c \leq 1 + x \\
&\Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1+c} \leq 2\sqrt{1+x} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+,*},
\end{aligned}$$

d'où, pour $x > 0$, $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \dfrac{x}{2}$.

Enfin, comme $x \neq 0$ et $x > 0$, on obtient $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \leq \dfrac{1}{2}.}$

Exercice 2 : DS 2012 (allégé).

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par quotient, elle est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et on a, pour $x \neq -1$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.}$

2) Soit $x > 0$, la fonction f est de classe C^3 sur $[0; x]$, donc, d'après la formule de Taylor, il existe $c \in]0; x[$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(c)$. D'après la question 1, on obtient, $f(x) = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{(1+c)^4}$. Or

$$\begin{aligned}
0 < c < x \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + x &\Rightarrow 1 \leq (1+c)^4 \leq (1+x)^4 \quad \text{car la fonction } x \mapsto x^4 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{(1+c)^4} \geq \frac{1}{(1+x)^4} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+,*} \\
&\Rightarrow -x^3 \leq -\frac{x^3}{(1+c)^4} \leq -\frac{x^3}{(1+x)^4} \quad (\bigstar) \quad \text{car } x \geq 0,
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{1 - x + x^2 - x^3 \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{(1+x)^4}.}$

3) D'après ($\bigstar$), pour $x > 0$, $\left|f(x) - (1 - x + x^2)\right| \leq x^3$. Donc, soit $a > 0$, on a, pour $x \in [0; a]$, $\left|f(x) - (1 - x + x^2)\right| \leq x^3 \leq a^3$. Donc, on cherche a tel que $a^3 = 10^{-4}$, d'où $\boxed{a = 10^{-4/3}.}$ **Remarque :** on peut choisir $a = 0,046$ (troncature).