Correction du CC 1 du lundi 2 mars 2015

Exercice 1. La fonction $f : t \mapsto \arctan(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Soit $x > 0$, alors f est dérivable sur $[0;x]$ donc continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$ et, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$, *i.e.* $\arctan(x) = \dfrac{x}{1+c^2}$. Or

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Rightarrow 0 \leq c^2 \leq x^2 \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{1+x^2} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+,*} \\ &\Rightarrow x \geq \frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \text{ car } x \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.}$

Exercice 2 : DS 2013

1) $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur I et $a < b \in I$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$\boxed{g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}g^{(3)}(c).}$$

2) On considère f définie par $f(x) = e^{-2x}$. Par composition, f est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}.}$$

Remarque : on peut démontrer cela par récurrence.

3) Soit $x > 0$. Comme f est de classe C^3 sur $[0;x]$, on applique la formule de Taylor-Lagrange à f sur l'intervalle $[0;x]$. Alors il existe $c \in]0;x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c) \\ &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \times 4 + \frac{x^3}{6} \times (-2)^3 e^{-2c}. \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}e^{-2c}$. Or,

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Rightarrow 0 \geq -2c \geq -2x \\ &\Rightarrow 1 \geq e^{-2c} \geq e^{-2x} \geq 0 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \frac{4}{3}x^3 \geq \frac{4}{3}x^3 e^{-2c} \geq \frac{4}{3}x^3 e^{-2x} \geq 0 \qquad \text{car } x \geq 0 \\ &\Rightarrow -\frac{4}{3}x^3 \leq -\frac{4}{3}x^3 e^{-2c} \leq -\frac{4}{3}x^3 e^{-2x} \leq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \leq f(x) \leq 1 - 2x + 2x^2.}$$

Et l'inégalité est vraie pour $x = 0$ puisque $f(0) = 1$.

Question bonus D'après la question précédente, pour tout $x \geq 0$, on a $\left|f(x) - \left(1 - 2x + 2x^2\right)\right| \leq \dfrac{4}{3}x^3$.

Si $x \leq a$, alors, pour tout $x \in [0;a]$, $\left|f(x) - \left(1 - 2x + 2x^2\right)\right| \leq \dfrac{4}{3}x^3 \leq \dfrac{4}{3}a^3$.

On résout $\dfrac{4}{3}a^3 = 10^{-6} \Leftrightarrow a^3 = \dfrac{3}{4}10^{-6} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}10^{-2}$. Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,a],\ \left|f(x) - \left(1 - 2x + 2x^2\right)\right| \leq 10^{-6}.}$

Remarque : on peut choisir $a = 0,908 \cdot 10^{-2}$.