Contrôle continu 2 : lundi 13 avril 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document autorisé.

<u>**Exercice 1 :**</u> **DST 2012 et 2014 (6 points).**

1. Déterminez les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1-2x)$ et $2\sin(x+x^2)$.
2. En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x)+2\sin(x+x^2)}{x^3}$.

<u>**Exercice 2 :**</u> **DS 2012 (3 points).** Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$.

<u>**Exercice 3 :**</u> **DST 2012 allégé (2 points).** On montre que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ admet le développement limité suivant en 0, $f(x) = \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \circ(x^3)$. Quelle est l'équation de la tangente et la position relative de la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse 0 ?

Correction du contrôle continu 2 du lundi 13 avril 2015.

<u>**Exercice 1 :**</u> **DST 2012 et 2014.** 1) On sait que $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + \circ(x^3)$, donc, par composition, $\boxed{\ln(1-2x) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \circ(x^3).}$ On sait aussi que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$, donc, par composition,

$\sin(x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{6}(x+x^2)^3 + \circ(x^3) = (x+x^2) - \frac{1}{6}(x^2+2x^3+x^4)(x+x^2) + \circ(x^3) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$.

Donc $\boxed{2\sin(x+x^2) = 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3).}$

2) Par somme, au voisinage de 0, $\dfrac{\ln(1-2x)+2\sin(x+x^2)}{x^3} = \dfrac{-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3 + 2\big(x+x^2-\frac{x^3}{6}\big) + x^3\varepsilon(x)}{x^3}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où $\dfrac{\ln(1-2x)+2\sin(x+x^2)}{x^3} = \dfrac{-3x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x)+2\sin(x+x^2)}{x^3} = -3.}$

<u>**Exercice 2 :**</u> **DS 2012.** Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Par composition avec $\frac{1}{x}$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a, au voisinage de $+\infty$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 = x^2 - \frac{1}{6} - x^2 + \varepsilon(\frac{1}{x}) = -\dfrac{1}{6} + \varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2 = -\dfrac{1}{6}.}$

<u>**Exercice 3 :**</u> **DST 2012 (allégé).** L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de f est $\boxed{y = \ln(2) - \frac{x}{2}.}$

Pour connaître la position relative de la courbe par rapport à la tangente, on étudie le signe de $f(x) - y$ pour x proche de 0. On a $f(x) - y = \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)$. Pour x proche de 0, $\frac{x^2}{8} \geq 0$ donc <u>la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0.</u>