

Contrôle continu 3 : mardi 19 mai 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document autorisé.

Exercice : DST Juin 2009 . Soit $\vec{F}$ l'arc paramétré définie par $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}$ et $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$.

1. Préciser le domaine d'étude et la classe de dérivabilité de l'arc.
2. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
3. Déterminer quand x' s'annule puis étudier le signe de x' .
4. En remarquant que $t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1)$, déterminer quand y' s'annule puis étudier le signe de y' (attention au signe de t^3).
5. Construire le tableau de variation de $\vec{F}$ en précisant les limites aux bornes du domaine de définition, les valeurs de t où x et y s'annulent.
6. **Bonus (1 point) :** Quelle la nature du point $M(x(1); y(1))$?

Correction du rattrapage du CC 3 (mardi 19 mai 2015).

Exercice : DST Juin 2009.

1) Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions rationnelles. Elles sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a $x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2}$ et $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$.

3) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = \frac{2}{t^2} \Leftrightarrow t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$. Donc x' s'annule uniquement en $t = 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ alors $x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2t \geq \frac{2}{t^2} \Leftrightarrow t^3 \geq 1$ (car $t^2 \geq 0$) $\Leftrightarrow t \geq 1$. Donc $x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$ et $x'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$.

4) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 = \frac{2}{t^3} \Leftrightarrow t^4 = 1 \Leftrightarrow t^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0$. Or $t^2 + 1 > 0$ donc $(t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 1$. Donc y' s'annule en $t = -1$ et $t = 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2t \geq \frac{2}{t^3} \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{t^3}$.

• Si $t > 0$ alors $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^4 \geq 1$ (car $t^3 \geq 0$) $\Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) \geq 0$. Or $t^2 + 1 > 0$ donc

$$\text{pour } t > 0, \quad y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 1 \Leftrightarrow |t| = t \geq 1.$$

• Si $t < 0$ alors $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^4 \leq 1$ (car $t^3 \leq 0$) $\Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) \leq 0$. Comme $t^2 + 1 > 0$ alors

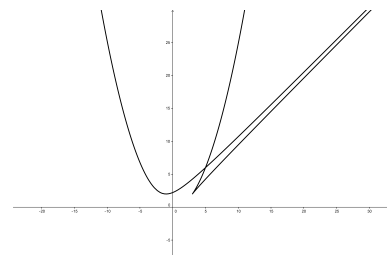
$$\text{pour } t < 0, \quad y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow |t| = -t \leq 1 \Leftrightarrow t \geq -1.$$

Donc $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in [-1; 0[\cup]1; +\infty[$ et $y'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; -1] \cup]0; 1]$.

Remarque : On aurait pu remarquer que $t \mapsto y(t)$ est paire et limiter l'étude de y à $]0; +\infty[$...

5) On en déduit le tableau de variations suivant (calculs des limites à faire) :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		-		- 0 +	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow -1$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 3$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 2$	$+\infty$
$y'(t)$		- 0 +		- 0 +	



6) Après avoir calculé $\vec{F}''$ et $\vec{F}^{(3)}$, on trouve $\vec{F}'(1) = (0; 0)$, $\vec{F}''(1) = (6; -4)$ et $\vec{F}^{(3)}(1) = (-12; 24)$. Comme $\vec{F}''(1) = (6; -4) \neq (0; 0)$, on a $p = 2$ et comme $\vec{F}''(1) = (6; -4)$ et $\vec{F}^{(3)}(1)$ ne sont pas colinéaires, alors $q = 3$. Donc le point $M(3, 2)$ est un point de rebroussement de première espèce.