Contrôle continu 3 : mardi 26 mai 2015

Durée : 25 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document autorisé.

__Exercice :__ **DST Juin 2009 (2ème session) .** Soit $\vec{F}$ l'arc paramétré définie par $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ et $y(t) = t + \dfrac{4}{t}$.

1. Préciser le domaine de définition et la classe de dérivabilité de l'arc.
2. Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, calculer $x'(t)$ et, pour $t \neq 0$, calculer $y'(t)$.
3. Déterminer quand x' s'annule puis étudier le signe de x'.
4. Déterminer quand y' s'annule puis étudier le signe de y'.
5. Construire le tableau de variations de $\vec{F}$ en précisant les limites aux bornes du domaine de définition, les extrema et les valeurs de t où x et y s'annulent.
6. **Bonus (1 point) :** Quelle la nature de la branche infinie en $t = 0$? Même question en $t = 1$?

Correction du CC 3 (mardi 26 mai 2015).

__Exercice :__ **DST Juin 2009 (2ème session).**

1) Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions rationnelles donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. La fonction x est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la fonction y est définie sur $\mathbb{R}^*$. __L'arc est défini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$.__

2) Soit $t \neq 1$, on a $x'(t) = \dfrac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \dfrac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}$. Soit $t \neq 0$, on a $y'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$.

Donc, $\boxed{\text{pour } t \neq 1, x'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}}$ et, $\boxed{\text{pour } t \neq 0, y'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}.}$

3) Soit $t \neq 1$, alors $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 2$. Donc __x' s'annule en $t = 0$ et $t = 2$.__

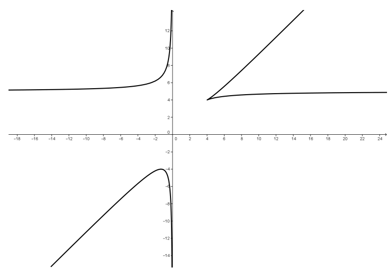
De plus, pour $t \neq 1, x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t(t-2) \geq 0$ car $(t-1)^2 \geq 0$, donc $\boxed{x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0 \text{ ou } t \geq 2}$ et $\boxed{x'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2.}$

4) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $y'(t) = \frac{t^2-4}{t^2}$, donc $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ ou $t = 2$.
Donc __y' s'annule en $t = -2$ et $t = 2$.__

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 4 \geq 0$ car $t^2 \geq 0$. Donc $\boxed{y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -2 \text{ ou } t \geq 2}$ et $\boxed{y'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-2; 2].}$

5) On en déduit le tableau de variations suivant (calculs des valeurs et des limites à faire) :

t	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{4}{3}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖		$-$		0	$+$	



6) En $t = 0$, $x(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \pm\infty$ donc __la courbe représentant l'arc $\vec{F}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x(0) = 0$.__

En $t = 1$, $y(1) = 5$ et $\lim\limits_{t\to 1} x(t) = \pm\infty$ donc __la courbe représentant l'arc $\vec{F}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = y(1) = 5$.__