Exercice 1. 1) On suppose f de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a;b]$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{(b-a)^4}{4!}f^{(4)}(c).}$$

2) On a, pour tout $k \geq 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, donc, avec $a = 0$, la formule de Taylor nous dit qu'il existe $c \in]0;b[$, tel que $e^b = f(0) + bf'(0) + \frac{b^2}{2}f''(0) + \frac{b^3}{6}f^{(3)}(0) + \frac{b^4}{4!}e^c$. Or, pour tout $k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 1$ et $e^c \leq e^b$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, d'où $e^b - \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6}\right) = e^c \frac{b^4}{24} \leq e^b \frac{b^4}{24}$. Donc $\boxed{\left|e^b - \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6}\right)\right| \leq e^b \frac{b^4}{24}.}$

3) Pour $b = \frac{1}{2}$, on en déduit qu'une approximation de $e^{1/2}$ est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{79}{48}$. Donc $\boxed{e^{1/2} \approx \frac{79}{48}.}$

4) D'après la question 2), on a $e^{1/2} - \frac{79}{48} \leq \frac{e^{1/2}}{2^4 \cdot 24}$. Si $e^{1/2} \leq 2$ alors l'erreur maximale est de $\frac{2}{2^4 \cdot 24} = \frac{1}{8 \cdot 24} = \boxed{\frac{1}{192}}$.

Exercice 2. 1) On sait que $\sin(x) = x + \circ(x)$ donc au dénominateur $\sin^2(x) = x^2 + \circ(x^2)$. Donc il faut déterminer le développement limité du numérateur à l'ordre 2. On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)$, donc, par composition,

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)\right)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\big) - \frac{1}{8} \cdot \big(-\frac{x^2}{2}\big)^2 + \circ(x^4) = 1 - \frac{x^2}{4} + \circ(x^2).$$

D'où $\frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin^2(x)} = \frac{-\frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_1(x)}{x^2 + x^2\varepsilon_2(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{4}.}$

2) Comme le dénominateur est x^3, il faut un développement limité à l'ordre 3 du numérateur.
On sait que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \circ(x^3)$ donc, par produit,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)\right) \times \big(1 - x + x^2 - x^3 + \circ(x^3)\big) = \big(1 - x + x^2 - x^3\big) + \big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\big) + \circ(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \circ(x^3).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$ donc, par composition, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$.
Donc $\frac{\frac{\cos(x)}{1+x} - e^{-x}}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x^3}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+x} - e^{-x}}{x^3} = -\frac{1}{3}.}$

3) On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)$, donc, par composition,

$$\begin{aligned}\ln(1 + \sin(x)) &= \ln\left(1 + \big(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)\big)\right) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \circ(x^4) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4) = \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $e^{-x} - 1 = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$, donc $\ln(1+\sin(x)) + e^{-x} - 1 = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4) = -\frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$,
donc $\frac{\ln(1 + \sin(x)) + e^{-x} - 1}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)}{x^4}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \sin(x)) + e^{-x} - 1}{x^4} = -\frac{1}{24}.}$

Exercice 3. 1) La fonction f est dérivable sur I, donc $1+f$ est dérivable sur I et comme, pour tout $x \in I$, $f(x) \neq -1$, alors, pour tout $x \in I, 1+f(x) \neq 0$, donc, par quotient, $\dfrac{1}{1+f}$ est dérivable, c'est-à-dire f' est dérivable sur I. Donc f est deux fois dérivable sur I. Si f est deux fois dérivable sur I et $1+f(x) \neq 0$ pour $x \in I$, alors, par quotient, $f' = \dfrac{1}{1+f}$ est deux fois dérivable, donc f est trois fois dérivable sur I. Comme précédemment, on en déduit que $\dfrac{1}{1+f}$ est trois dérivable sur I comme quotient de fonction trois dérivable sur I dont le dénominateur de s'annule par sur I, donc f' est trois dérivable, c'est-à-dire f est quatre fois dérivable sur I.

Remarque : en faisant une étape supplémentaire, on montre que f est 5 fois dérivable sur I, donc que $f^{(4)}$ est dérivable donc continue sur I, c'est-à-dire que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^4 \text{ sur } I}$. Par récurrence, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2) D'après la remarque de la question 1), f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I, donc, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un développement limité d'ordre 4 en 0.

3) Comme le développement limité de f est donné par sa formule de Taylor-Young, on sait que $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{1+f(0)} = 1$, d'où $\boxed{a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1.}$

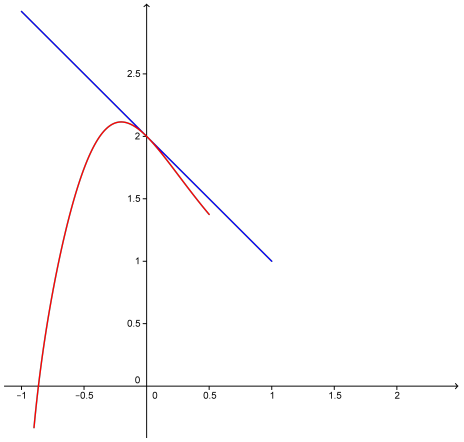
4) Comme f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I, alors f' est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I, donc, d'après la formule de Taylor-Young, f' admet un développement limité d'ordre 3 en 0. On a $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \circ(x^4)$ et f' admet un développement limité d'ordre 3 en 0, donc le développement limité de f' en 0 s'obtient en "dérivant" le développement limité de f en 0, c'est-à-dire $\boxed{f'(x) = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \circ(x^3).}$

5) On effectue une division selon les puissances croissantes de $1 + f(x) = 1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4xx^4 + \circ(x^4)$. Après calcul (qui est à rédiger), on obtient $\boxed{\dfrac{1}{1+f(x)} = 1 - x + (1-a_2)x^2 + (-1+2a_2-a_3)x^3 + \circ(x^3).}$

6) Par unicité du développement limité de f' en 0, on a
$1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \circ(x^3) = 1 - x + (1-a_2)x^2 + (-1+2a_2-a_3)x^3 + \circ(x^3)$ implique
$-1 = 2a_2, 1 - a_2 = 3a_3, -1 + 2a_2 - a_3 = 4a_4$. En résolvant ce système, on obtient $\boxed{a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2} \text{ et } a_4 = -\frac{1}{8}.}$

Conclusion : le développement limité de f en 0 est $f(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x^4}{2} + \circ(x^4)$.

Exercice 2 (DS 2013). 1) La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{x^2+x+1}$. Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie pour $1 + x > 0$, *i.e.* $x > -1$, et que le discriminant du polynôme $x^2 + x + 1$ est strictement négatif, on en déduit que f est définie sur $]-1; +\infty[$.

2) En 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$, alors $2 + \ln(1+x) = 2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$. On effectue une division selon les puissances croissantes, on trouve (calcul à détailler, **attention à mettre les puissances dans l'ordre croissant !**), $\boxed{f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x+x^2} = 2 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3 + \circ(x^3).}$

3) D'après la question précédente, la courbe représentant f a une tangente d'équation $y = 2 - x$ au point d'abscisse 0. De plus, au voisinage de 0, $f(x) - y = -\frac{3}{2}x^2 + \circ(x^2)$. Comme pour x proche de 0 on a $-\frac{3}{2}x^2 \leq 0$, on en déduit que la courbe représentant f est en-dessous de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
Remarque : un calcul rapide de limite montre que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to 0^+$.