Ce devoir est à rendre le mercredi 8 avril.

Exercice 1.

1. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable. Énoncer la formule de Taylor-Lagrange pour f avec $n = 4$.
2. On suppose maintenant que $a = 0, b >$ et $f(x) = e^x$. Expliciter la formule précédente dans ce cas et en déduire que

$$\left| e^b - \left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6}\right) \right| \leq e^b \, \frac{b^4}{24}.$$

3. On suppose de plus que $b = \frac{1}{2}$. En utilisant 2), déterminer une approximation de $\exp\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. En admettant que $\exp\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2$, déterminer un majorant de l'erreur commise.

Exercice 2.

1. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin^2(x)}$.
2. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\cos(x)}{1+x} - e^{-x}}{x^3}$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $x_0 = 0$ de $\ln(1 + \sin(x))$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin(x)) + e^{-x} - 1}{x^4}$.

Exercice 3. On pose $I =] - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$. On admet qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{1 + f(x)} \quad \text{et} \quad f(0) = 0. \qquad (\star)$$

En particulier, on admet que, pour tout $x \in I, f(x) \neq -1$. On ne cherchera pas à déterminer explicitement f.

1. Montrer que f' est dérivable sur I. En répétant le raisonnement, montrer que f est au moins 4 fois dérivable sur I.
2. Pourquoi f admet-elle un développement limité d'ordre 4 en 0 ? On notera ce développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \circ(x^4).$$

3. Que vaut a_0 ? Déduire $f'(0)$ à l'aide de l'équation $(\star)$. En déduire a_1.
4. Pourquoi f' admet-elle un développement limité d'ordre 3 en 0 et pourquoi vaut-il

$$f'(x) = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + x^3 \varepsilon(x) \ \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \ ?$$

5. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1 + f(x)}$ en fonction de a_2, a_3 et a_4.
6. En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

Exercice 2 (DS 2013). Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2 + \ln(1 + x)}{x^2 + x + 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 en 0.
3. Donner l'équation de la tangente ainsi que la position de la courbe représentative de f au voisinage du point 0. Représenter sommairement la courbe de f au voisinage du point 0.

FIN