Exercice 1. i) Si f est 3 fois dérivable au voisinage de $x_0 = 0$ alors, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

ii) La fonction f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions 3 fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)e^x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)e^x = \sqrt{2}\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]e^x$$

$$f''(x) = \sqrt{2}\left[-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]e^x = -2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)e^x,$$

et $f^{(3)}(x) = -2\sqrt{2}\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]e^x$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que $f(0) = 1$, $f'(0) = -1 + 1 = 0$, $f''(0) = -2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$, et $f^{(3)}(0) = -2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = -4$. Donc, d'après la formule de Taylor-Young, $f(x) = 1 + 0 - \frac{2}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, *i.e.*,

$$\boxed{f(x) = 1 - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)} \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

iii) D'après la question 2, au voisinage de 0, $f(x) - 1 + x^2 = -\frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc, par quotient, $\dfrac{f(x) - 1 + x^2}{x^3} = \dfrac{-\frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3} = -\frac{2}{3} + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x) - 1 + x^2}{x^3} = -\dfrac{2}{3}.}$

Remarque : on pourrait développer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos(x) - \sin(x))$ *puis utiliser les DL connus mais il faut alors expliquer pourquoi cela correspond à la formule de Taylor-Young.*

Exercice 2. i) La présence de x^2 au dénominateur indique qu'il faut faire un DL d'ordre 2 au numérateur. On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et $e^x = 1 + x + \circ(x)$, donc

$$\exp\big(\cos(x) - 1\big) = \exp\big(-\tfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)\big) = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2).$$

Par quotient, $\dfrac{\exp(\cos(x) - 1) - 1}{x^2} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{x^2 + x^2\varepsilon_2(x)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)}$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$, d'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\exp\big(\cos(x) - 1\big) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.}$$

ii) La présence de x^3 au dénominateur indique qu'il faut faire un DL d'ordre 3 au numérateur. On sait que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)$, donc par composition, $\sin(2x) = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + \circ(x^3)$. Par produit, $x(1 + \cos(x)) = 2x - \dfrac{x^3}{2} + \circ(x^3)$, puis par somme et quotient, $\dfrac{x(\cos(x) + 1) - \sin(2x)}{x^3} = \dfrac{-\frac{x^3}{2} + \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x^3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3} + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos(x) + 1) - \sin(2x)}{x^3} = \frac{5}{6}.}$$

iii) Lorsque x tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Donc, par composition avec $t = \frac{1}{x}$, $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \circ(t^2)$. On sait aussi que $\ln(1 - t) = -t + \circ(t)$, donc, par composition,

$$\ln(\cos(t)) = \ln\big(1 - \frac{t^2}{2} + \circ(t^2)\big) = -\frac{t^2}{2} + \circ(t^2).$$

Donc, par quotient, $\dfrac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \dfrac{-\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{2} + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, d'où

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{2}.}$$

Exercice 3. i) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable lorsque $1+x > 0$, *i.e.*, $x > -1$ et ne s'annule qu'en $x = 0$, donc la fonction f est dérivable sur $I =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$ et dont le dénominateur s'annule en $x = 0$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln(1+x) = -\infty$ et que sin est définie en -1, alors $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = 0.}$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc, pour $x > 0$, $-\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\ln(1+x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(1+x)} = 0$, donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

ii) Au voisinage de 0, $\boxed{\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}$ et $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3).}$

Par quotient, $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)}$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Puis, en factorisant par x, on obtient

$$\boxed{f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_2(x)}} \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

iii) Division à poser. 1ère étape : $1 - \frac{x^2}{6} = \boxed{1} \times \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right] + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$.
2ème étape : $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} = \boxed{\dfrac{x}{2}} \times \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right] - \frac{x^2}{4} + \circ(x^2)$. Dernière étape : $-\frac{x^2}{4} = \boxed{\dfrac{x^2}{4}} \times \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right] + 0 + \circ(x^2)$.
Donc $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

iv) La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 donné par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \circ(x)$ donc f est prolongeable par continuité et dérivabilité en 0 en posant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

v) D'après la question précédente, la courbe représentant f a une tangente d'équation $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ au point d'abscisse 0. De plus, d'après la question iii), au voisinage de 0, $f(x) - y = -\dfrac{x^2}{4} + \circ(x^2)$. Comme pour x proche de 0 on a $-\frac{x^2}{4} \leq 0$, alors la courbe représentant f est en-dessous de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

vi)