Exercice 32.1) On commence avec le développement limité de $\sin(x)$ en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$.
On en déduit $x^2\sin(x) = x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, et $x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc, par quotient,

$$\frac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)} = \frac{x^3 + x^3\varepsilon(x)}{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)} = \frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{6}+\varepsilon(x)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, alors, $1 + \varepsilon(x) \to 1$ et $\frac{1}{6} + \varepsilon(x) \to \frac{1}{6}$, donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)} = 6.}$

Exercice 33. Tout d'abord, f est définie au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x\to 0} 2 + 2x + x^2 = 2 > 0$, donc $\ln(2 + 2x + x^2)$ est bien définie au voisinage de 0. Calculons le DL de f au voisinage de 0.
On a $f(x) = \ln(2 + 2x + x^2) = \ln\Big(2\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big)\Big) = \ln(2) + \ln\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big)$.
Sachant que $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$, on en déduit le DL de f par composition de $x + \frac{x^2}{2}$ par $\ln(1 + x)$ (puisque $\lim\limits_{x\to 0} x + \frac{x^2}{2} = 0$). On a

$$\ln\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \circ(x^3) = \text{[faire les calculs]} = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3).$$

D'où, en 0, $\boxed{f(x) = \ln(2) + x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}$. La tangente à la courbe représentant f en 0 a pour équation $\boxed{y = \ln(2) + x.}$

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente dépend du signe de $f(x) - \big(\ln(2) + x\big) = -\dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0. Si $\boxed{x > 0,}$ on a $-\dfrac{x^3}{6} < 0$, donc <u>la courbe représentant f est en-dessous de la tangente</u>, et si $\boxed{x < 0,}$ on a $-\dfrac{x^3}{6} < 0$, donc <u>la courbe est au-dessus de la tangente.</u>

Q1MI2M21 Math **Indication de correction des exercices à rendre : Application des DL.** **2015**

Exercice 32.1) On commence avec le développement limité de $\sin(x)$ en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$.
On en déduit $x^2\sin(x) = x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, et $x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc, par quotient,

$$\frac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)} = \frac{x^3 + x^3\varepsilon(x)}{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)} = \frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{6}+\varepsilon(x)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, alors, $1 + \varepsilon(x) \to 1$ et $\frac{1}{6} + \varepsilon(x) \to \frac{1}{6}$, donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)} = 6.}$

Exercice 33. Tout d'abord, f est définie au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x\to 0} 2 + 2x + x^2 = 2 > 0$, donc $\ln(2 + 2x + x^2)$ est bien définie au voisinage de 0. Calculons le DL de f au voisinage de 0.
On a $f(x) = \ln(2 + 2x + x^2) = \ln\Big(2\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big)\Big) = \ln(2) + \ln\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big)$.
Sachant que $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$, on en déduit le DL de f par composition de $x + \frac{x^2}{2}$ par $\ln(1 + x)$ (puisque $\lim\limits_{x\to 0} x + \frac{x^2}{2} = 0$). On a

$$\ln\big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \circ(x^3) = \text{[faire les calculs]} = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3).$$

D'où, en 0, $\boxed{f(x) = \ln(2) + x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}$. La tangente à la courbe représentant f en 0 a pour équation $\boxed{y = \ln(2) + x.}$

De plus, la position de la courbe par rapport à la tangente dépend du signe de $f(x) - \big(\ln(2) + x\big) = -\dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0. Si $\boxed{x > 0,}$ on a $-\dfrac{x^3}{6} < 0$, donc <u>la courbe représentant f est en-dessous de la tangente</u>, et si $\boxed{x < 0,}$ on a $-\dfrac{x^3}{6} < 0$, donc <u>la courbe est au-dessus de la tangente.</u>