

Donner le DL d'ordre 6 en 0 de $x \mapsto (2x+1)\sinh(x)$ et donner le DL d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

1) Commençons par trouver le DL d'ordre 6 en 0 de $\sinh(x)$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Comme $x \mapsto e^x$ admet un DL de tout ordre en 0, alors, par composition puis par somme, $x \mapsto \sinh(x)$ admet un DL d'ordre 6 en 0. En 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, donc, par composition avec $x \mapsto -x$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. Puis par somme, $e^x - e^{-x} = 2x + 2 \cdot \frac{x^3}{6} + 2 \cdot \frac{x^5}{120} + o(x^6)$. Donc

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

Enfin, par produit,

$$(2x+1)\sinh(x) = (2x+1) \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) + o(x^6) = \left(2x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} \right) + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) + o(x^6),$$

d'où
$$(2x+1)\sinh(x) = x + 2x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{60} + o(x^6).$$

2) On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Donc, par produit, $x \mapsto e^x \ln(1+x)$ admet un DL d'ordre 3 en 0. On calcule

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + o(x^3) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} \right) + \left(\frac{x^3}{2} \right) + 0 + o(x^3), \end{aligned}$$

d'où
$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donner le DL d'ordre 6 en 0 de $x \mapsto (2x+1)\sinh(x)$ et donner le DL d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

1) Commençons par trouver le DL d'ordre 6 en 0 de $\sinh(x)$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Comme $x \mapsto e^x$ admet un DL de tout ordre en 0, alors, par composition puis par somme, $x \mapsto \sinh(x)$ admet un DL d'ordre 6 en 0. En 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, donc, par composition avec $x \mapsto -x$, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. Puis par somme, $e^x - e^{-x} = 2x + 2 \cdot \frac{x^3}{6} + 2 \cdot \frac{x^5}{120} + o(x^6)$. Donc

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

Enfin, par produit,

$$(2x+1)\sinh(x) = (2x+1) \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) + o(x^6) = \left(2x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} \right) + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) + o(x^6),$$

d'où
$$(2x+1)\sinh(x) = x + 2x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{60} + o(x^6).$$

2) On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Donc, par produit, $x \mapsto e^x \ln(1+x)$ admet un DL d'ordre 3 en 0. On calcule

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + o(x^3) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} \right) + \left(\frac{x^3}{2} \right) + 0 + o(x^3), \end{aligned}$$

d'où
$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$