

Exercice 59 : (1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

La différentielle de f au point $A(1, 1)$ est l'application

$$d_{(1,1)} f : (h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + k \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1).$$

Ici $d_A f(h, k) = h \times \frac{1}{\sqrt{2}} + k \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left. \begin{aligned} f(1,02; 1,01) &= \sqrt{1,02^2 + 1,01^2} = 1,435444 \\ f(1,1) &= \sqrt{2} = 1,414213 \end{aligned} \right\} f(1,02; 1,01) - f(1,1) = 0,0212306$$

$$d_A f(0,02; 0,01) = (0,02 + 0,01) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0212132$$

$$[f(1,02; 1,01) - f(1,1)] - d_A f(0,02; 0,01) = 1,7 \cdot 10^{-5}$$

(2) $g: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\arctan(u) \longrightarrow \frac{u' du}{1+u^2}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \times \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$d_{(x,y)} f(h, k) = \frac{-h y}{x^2 + y^2} + \frac{k x}{x^2 + y^2}$$

$$1) \omega(x, y) = y dx + x dy \text{ sur } U = \mathbb{R}^2$$

$$\omega \text{ fermée sur } U? \quad P(x, y) = y \quad , \quad Q(x, y) = x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 1 \quad \text{donc} \quad \underline{\omega \text{ est fermée sur } U.}$$

$$\omega \text{ exacte? On cherche } f \text{ telle que } \omega = df$$

$$\text{Si } f \text{ existe alors } df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

$$\text{et } \omega = df \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = x$$

$$\int P(x, y) dx = y \cdot x + g(y) \quad \text{et } g \text{ dérivable en } y.$$

$$f(x, y) = yx + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) = Q(x, y) = x$$

$$\text{donc } g'(y) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow g(y) = C \text{ par rapport à } y \quad (\text{car } \mathbb{R} \text{ ouvert})$$

$$\text{donc } f(x, y) = xy + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On a bien } df(x, y) = y dx + x dy = \omega(x, y) \quad \text{donc} \quad \underline{\omega \text{ est exacte sur } U}$$

$$2) \omega(x, y) = x dx + y dy \text{ sur } U = \mathbb{R}^2.$$

$$\omega \text{ fermée? } P(x, y) = x \text{ et } Q(x, y) = y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \text{donc} \quad \underline{\omega \text{ est fermée sur } U}$$

$$\omega \text{ exacte? On cherche } f \text{ telle que } df = \omega.$$

$$\text{Si } f \text{ existe alors } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

$$\int P(x, y) dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + g(y) \quad \text{avec } g \text{ dérivable en } y$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g'(y) = Q(x, y) = y \Rightarrow g'(y) = y$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{2} y^2 + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Donc $f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(3)

On a bien $df(x, y) = w(x, y)$, donc w est exacte sur $\mathbb{R}^2$

(3) $w(x, y) = y dx - x dy$

On note $P(x, y) = y$ et $Q(x, y) = -x$. Alors P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

donc w est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2$.

En particulier w exacte et $C^1 \Rightarrow w$ fermée.

« w fermée ? $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -1$ donc w n'est pas fermée.

Comme w est C^1 , on en déduit que w n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$.

(4) $w(x, y) = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = U$ w C^1 sur U .

« w fermée ? $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y x}{(x^2 + y^2)^2}$

$Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x y}{(x^2 + y^2)^2}$ donc w est fermée sur U

« Supposons qu'il existe f telle que $df = w$

alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \int P(x, y) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{u' du}{u}$
 $\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(u(x, y)) + g(y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(y)$ avec $u = x^2 + y^2$ et g dérivable

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \times \frac{2y}{x^2 + y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + g'(y) = Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow g'(y) = 0$ sur U ouvert $\Rightarrow g'(y) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Donc $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. On a bien $df = w$ sur U

Donc w est exacte sur U .

$$(5) \quad \omega(x, y) = \frac{1}{y^3} \left((3x^2 + y^2) y dx - 2x^3 dy \right) \quad \text{sur } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

(4)

$$P(x, y) = \frac{(3x^2 + y^2)}{y^2} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{-2x^3}{y^3} ; \quad \text{Pst } \omega \text{ est } C^1 \text{ sur } U \Rightarrow \omega \text{ est } C^1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^3 - (3x^2 + y^2)y}{y^4} = \frac{2y^2 - 3x^2 - 2y^2}{y^3} = -\frac{3x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{6x^2}{y^3} \quad \text{donc } \underline{\omega \text{ est fermée sur } U}.$$

$$\text{Supposons } \exists f, df = \omega \text{ alors } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

$$\int Q(x, y) dy = \int \frac{-2x^3}{y^3} dy = -2x^3 \int \frac{dy}{y^3} = +2x^3 \times \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} \right] = \frac{x^3}{y^2} + g(x)$$

avec g dérivable en x

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + g(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2}{y^2} + g'(x) = P(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + g'(x)y^2}{y^2} = \frac{3x^2 + y^2}{y^2} \Rightarrow g'(x) = 1 \text{ sur } U \Rightarrow g(x) = x + C$$

$$\text{Donc } f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + x + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \text{ et } (x, y) \in U.$$

$$\text{On a bien } df = \omega \quad \text{donc } \underline{\omega \text{ est exacte sur } U}.$$

$$(6) \quad \omega(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \quad \text{sur } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$\text{On note } P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} . \quad \text{Pst } \omega \text{ est } C^1 \Rightarrow \omega \text{ est } C^1$$

$$\omega \text{ fermée ? } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{+(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} . \quad \text{Donc } \underline{\omega \text{ est fermée sur } U}.$$

Si ω est exacte alors il existe f telle que $df = \omega$.

Dans ce cas, pour tout arc paramétré γ , $\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$$\text{on } \gamma = ([a, b]; \vec{F}) \quad \vec{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t); y(t))$$

(5)

$$\text{et alors } f(B) = f(x(b); y(b)) \text{ et } f(A) = f(x(a); y(a))$$

$$\text{On choisit } \gamma \text{ tel que } x^2(t) + y^2(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [a, b]$$

$$\text{et } x(a) = x(b), y(a) = y(b)$$

$$x(t) = \cos(t) \quad t \in [0; 2\pi], \quad A(1; 0) \text{ et } B(1; 0) \quad a=0, b=2\pi \\ y(t) = \sin(t)$$

$$df = \omega \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_a^b [P(x(t); y(t)) x'(t) + Q(x(t); y(t)) y'(t)] dt$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} (-y(t) x'(t) + x(t) y'(t)) dt \quad \text{car } x^2(t) + y^2(t) = 1 \\ &= \int_0^{2\pi} (+\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \text{car } x^2(t) + y^2(t) = 1 \\ x'(t) = -\sin(t), y'(t) = \cos(t) \end{array} \right\} \text{contradiction} \end{aligned}$$

$$\text{Or } f(B) - f(A) = 0 \text{ (puisque } A=B)$$

donc ω n'est pas exacte sur U .

Exercice 61: $\omega(x, y) = 3y dx - 4x^2 y dy$.

$$P(x, y) = 3y, \quad Q(x, y) = -4x^2 y \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -8xy.$$

ω non fermée et car $C^1 \Rightarrow \omega$ non exacte.

segment $[AB]$ où $A(-1; 0), B(0; 3)$

$\overrightarrow{AB}$ vecteur directeur $(1; 3)$. On a $P(t) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x_A + 1 \times t \\ y(t) = y_A + 3 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$P(t), (x(t); y(t)) \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = t-1 \\ y_1(t) = 3t \end{cases}$$

$$t=0, P(0)=A; t=1, P(1)=B$$

$$t \in [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(t) = t-1 \\ y_2(t) = 3t \end{cases} \text{ avec } \underline{\underline{0 \leq t \leq 1}}$$

De même $\Pi(t) \in [BC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(t) = 0 + 3t \\ y_2(t) = 3 - 6t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

$\overrightarrow{BC}(3; -6)$

$\Pi(0), (0; 3) = B, \Pi(1) = C(3; -3)$

$B_2(0; 3), C(3; -3)$

Et $\Pi(t) \in [CD] \Leftrightarrow \begin{cases} x_3(t) = 3 + 0 \times t \\ y_3(t) = -3 - 2 \times t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$

$C(3; -3), D(3; -5)$

$\overrightarrow{CD}(0; -2)$

$\Pi(0) = C(3; -3) \quad \Pi(1) = D(3; -5)$

Donc $\int_{\gamma} \omega = \int_{[AB]} \omega + \int_{[BC]} \omega + \int_{[CD]} \omega$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 P(x_1(t); y_1(t)) x_1'(t) + Q(x_1(t); y_1(t)) y_1'(t) dt$

$+ \int_0^1 P(x_2(t); y_2(t)) x_2'(t) + Q(x_2(t); y_2(t)) y_2'(t) dt$

$+ \int_0^1 P(x_3(t); y_3(t)) x_3'(t) + Q(x_3(t); y_3(t)) y_3'(t) dt$

$= \int_0^1 3 - (3t) \times 1 - 4(t-1)^2 \times (3t) \times 3 dt$

$+ \int_0^1 3(3-6t) \times 3 - 4(3t)^2 \times (3-6t) \times (-6) dt$

$+ \int_0^1 3(-3-2t) \times 0 - 4(3)^2 \times (-3-2t) \times (-2) dt$

$$\int_{\gamma} \omega = -\frac{785}{2}$$

$= \int_0^1 9t - 36t(t-1)^2 dt + \int_0^1 9(3-6t) + 24 \times 9t^2(3-6t) dt + \int_0^1 72(-3-2t) dt$

$= \int_0^1 9t - 36t^3 + 72t^2 - 36t dt + 9 \int_0^1 3 - 6t + 72t^2 - 144t^3 dt - 72 \int_0^1 3 + 2t dt$

$= \left[\frac{9}{2}t^2 - \frac{36}{4}t^4 + \frac{72}{3}t^3 - 36t \right]_0^1 + 9 \left[3t - \frac{6}{2}t^2 + \frac{72}{3}t^3 - \frac{144}{4}t^4 \right]_0^1 - 72 \left[3t + \frac{2}{2}t^2 \right]_0^1$