CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MÉLANGES DE FLUIDES VISCO-ÉLASTIQUES

Laurent CHUPIN

Table des matières

Introduction

- Première partie -
Modélisation d'un écoulement diphasique visco-élastique

La dérivation d'un modèle pour les mélanges de fluides visco-élastiques que l'on présente dans la première partie est une extension d'un modèle diphasique proposé par Franck Boyer au cours de sa thèse [11]. Dans le premier chapitre de ce mémoire, on établit un modèle pour l'étude des écoulements diphasiques basé sur la théorie de Cahn et Hilliard et sur les principes fondamentaux de la mécanique. Le second chapitre est alors essentiellement consacré à la prise en compte du comportement non newtonien que l'on cherche à modéliser.

Chapitre 1 - Modélisation d'un mélange

Au cours de cette thèse, on se place dans le cas où les deux phases sont incompressibles et on suppose la température constante. On utilise un modèle à interface diffuse, ce qui est caractérisé par l'introduction d'un paramètre d'ordre $\varphi(t,x)$ quantifiant la proportion de l'un des fluides au point (t,x). On verra assez rapidement (grâce aux équations de conservation de la masse dans chacune des phases) que l'évolution de ce paramètre d'ordre est décrite par une équation comportant un terme de transport et un terme de diffusion :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi + \operatorname{div}\left(\frac{1-\varphi^2}{2}w\right) = 0. \tag{1}$$

Cette équation traduit le fait d'une part que l'interface (c'est-à-dire l'endroit où φ varie) est transportée à la vitesse moyenne du mélange v et d'autre part qu'une diffusion s'effectue à travers cette interface. Le flux de cette diffusion est proportionnel à la vitesse relative des deux phases, notée ici w.

On verra aussi que le choix de la vitesse moyenne du mélange est essentiel. On a privilégié une moyenne volumique des vitesses de chaque phase. Un tel choix permet de conserver la relation d'iso-volume (qui est traditionnellement associée à l'incompressibilité) :

$$\operatorname{div}(v) = 0.$$

Ainsi, même si le mélange n'est pas incompressible (les deux phases peuvent avoir des densités différentes) il est très important, aussi bien du point de vue mathématique que du point de vue numérique, d'avoir une telle relation.

L'étape suivante consiste à déterminer des lois d'évolution pour les vitesses v et w. Les lois de conservation de la quantité de mouvement pour chacune des deux phases donnent après combinaisons linéaires les deux équations d'évolution voulues. Elles font bien sûr intervenir les forces extérieures appliquées à chaque phase (gravité, frottement et potentiel chimique) ainsi que les forces intérieures. On considèrera que ces dernières sont des forces de surface et qu'elles peuvent donc s'écrire sous la forme $\operatorname{div}(-pId+\tau)$, p étant la pression hydrostatique et τ le tenseur des contraintes. Après simplifications (justifiées dans [11]), on a

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v\otimes v) + \nabla p - \operatorname{div}\tau = -\rho\nabla\mu_0 + \rho g - (\rho_1^0-\rho_2^0)\frac{1-\varphi^2}{4}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right) + \frac{1}{2}\mu\nabla\varphi,$$

$$0 = -\rho_1\rho_2\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - \rho\xi w. \tag{2}$$

La première équation n'est rien d'autre qu'une équation de conservation de la quantité de mouvement pour le mélange. En particulier, elle fait apparaître des forces “moyennes” agissant comme le potentiel chimique μ dont une expression en fonction de φ a été donnée par A. Onuki dans [69]. Ce potentiel est défini comme la différentielle d'une énergie libre par rapport à la densité. Dans le cadre de notre étude, on considère une énergie libre de type Cahn-Hilliard :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_\Omega \frac{A}{2}|\nabla\varphi|^2 + E\,F(\varphi),$$

ce qui fournit l'expression suivante pour le potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi} = -A\,\Delta\varphi + E\,F'(\varphi).$$

Le type d'énergie considéré fait apparaître le potentiel de Cahn-Hilliard F ayant la forme d'un double puits, les deux puits correspondant aux deux états stables où il n'y a qu'une seule phase dans le mélange, voir la figure 1. L'avantage d'une telle énergie libre est d'en connaître une approximation de type polynomial assez simple (de degré 4) du potentiel fréquemment utilisée dans la littérature [84].

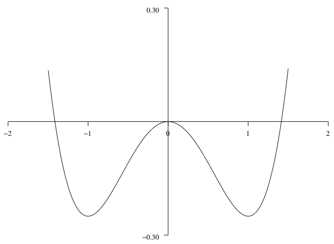


FIG. 1: Exemple de potentiel F

Pour ce qui est de la deuxième équation obtenue (2), elle montre que, modulo les approximations effectuées, on peut exprimer la vitesse relative entre les deux phases w en fonction de φ. Cette fluctuation en vitesse est directement reliée au coefficient de frottement ξ entre les deux phases ainsi qu'au gradient du potentiel de Cahn-Hilliard. Cette expression de la vitesse relative nous permettra de substituer w dans l'équation d'évolution du paramètre d'ordre (1) afin d'obtenir une équation de type Cahn-Hilliard [30] couplée à la vitesse par un terme de transport :

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi - \rho_1^0\rho_2^0\,\mathrm{div}\left(\frac{(1-\varphi^2)^2}{8\,\xi\,\rho}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\right) = 0.$$

Il faudra garder en mémoire que les quantités ρ, μ et ξ dépendent en fait de la composition du mélange, c'est-à-dire du paramètre d'ordre φ. Notons par exemple que la quantité $B(\varphi) = (1-\varphi^2)^2/8\,\xi$ est appelée coefficient de mobilité et joue un rôle très important dans le traitement mathématique de ce type d'équations.

Les seules inconnues sur lesquelles on n'a pour l'instant aucune information sont les termes caractérisant la contrainte intérieure au mélange. Nous avons vu que cette contrainte est de la forme $-pId + \tau$. En ce qui concerne la pression p, elle peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\mathrm{div}\ v = 0$. Pour fermer le système, il nous faut donc une équation d'évolution sur le tenseur des contraintes τ. C'est ici qu'apparaît la différence entre le cas d'un mélange de fluides newtoniens et celui d'un mélange de fluides visco-élastiques.

Chapitre 2 - De la visco-élasticité...

Un fluide newtonien est un milieu dans lequel le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformations (ce tenseur des taux de déformations est la partie symétrique du gradient de vitesse, il est noté $D(v)$). Notons pour information que des fluides dont le tenseur des contraintes est constant par rapport au tenseur des taux de déformations sont dits parfaits, voir [36] p.125. Dans le cas newtonien, le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = 2\eta D(v).$$

Le coefficient η est appelé viscosité du fluide. Dans le cas diphasique ce coefficient dépend de φ de sorte que lorsque seul l'un des deux fluides est présent à l'instant t et en un point x (par exemple si $\varphi(t,x) = 1$) on retrouve pour η, la valeur de la viscosité de ce fluide.

Notre objectif est de modéliser un mélange de fluides dits visco-élastiques dont les polymères en sont les exemples les plus connus. Il convient de préciser qu'il existe de nombreuses familles de fluides non newtoniens. Il est d'usage de les classer selon leur loi de comportement (lois ayant pour but d'exprimer les efforts intérieurs, c'est à dire la contrainte, en fonction des déformations subies par le système).

Un fluide visco-élastique est un fluide non newtonien ayant une mémoire continue dans le comportement du milieu, ceci se traduit par des lois constitutives où le tenseur des contraintes s'exprime comme une intégrale du tenseur des taux de déformations. On verra que la plupart de ces lois intégrales ont une forme différentielle équivalente, et compte tenu de notre approche il sera plus aisé de travailler avec de telles lois. Mais là aussi, il n'y a pas unicité des lois de comportement décrivant un fluide visco-élastique et la sélection d'une telle loi est évidemment un pas critique dans la modélisation d'un fluide visco-élastique (et donc *a fortiori* d'un mélange de deux fluides visco-élastiques). Un très grand nombre de lois a été proposé (et l'est encore !) pour décrire le comportement rhéologique des polymères. On peut citer dès à présent les travaux de H. Giesekus [37], R.G. Larson et T.C.B McLeish [54], G. Marrucci [61], J.G. Oldroyd [67] et H.C. Öttinger [70]. Afin que la procédure de modélisation soit réaliste, l'équation constitutive doit satisfaire au moins les prédictions des nombreux tests rhéométriques effectués en laboratoires. D'un autre côté, le modèle doit permettre un traitement numérique et une étude mathématique. Un choix raisonnable est le modèle d'Oldroyd [67] et c'est ce modèle que l'on a intégré aux équations décrivant le mélange diphasique.

Plus précisément, $\frac{D}{Dt}$ étant une dérivée en temps objective, c'est-à-dire indépendante du repère choisi, le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = 2\eta(1-r)D(v) + \sigma, \qquad \frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v).$$

Ce modèle d'Oldroyd peut être vu comme la généralisation multi-dimensionnel du comportement d'un complexe masse-ressort appelé cellule de Jeffrey (voir la figure 2).

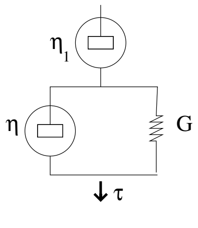


FIG. 2: Cellule de Jeffrey

Plusieurs choses sont à remarquer dans la façon choisie pour écrire ce modèle. Tout d'abord on a séparé la contrainte τ en deux composantes, la première $2\eta(1-r)D(v)$ correspond à la partie newtonienne de la contrainte (on retrouve en effet un tenseur dépendant linéairement du tenseur des taux de déformations) et la seconde σ caractérise la partie purement élastique de la contrainte.

Le coefficient r est appelé paramètre de retard et permet de distribuer la partie élastique et la partie visqueuse du fluide : il est compris entre 0 et 1, si r est proche de 1 alors le fluide est très élastique et inversement si r est proche de 0 alors le fluide est plutôt newtonien.

Les coefficients η et λ ont des rôles symétriques, ils mesurent pour le premier la viscosité (comme dans le cas newtonien) et pour le second, l'élasticité. Notons que si $\lambda \to 0$ alors on retrouve le comportement d'un fluide newtonien. Pour ce qui est du cas $\eta = 0$, le modèle est connu et étudié sous le nom de modèle de Maxwell [49]. Il est, en de nombreux points, très différent du cas présent. Dans la suite des travaux, à l'exception de quelques remarques, on supposera $\eta > 0$.

Dans le cas d'un mélange diphasique, la même formulation de la loi constitutive sera utilisée. La différence est la dépendance des paramètres r, η et λ par rapport au paramètre d'ordre φ de sorte que, comme pour la viscosité dans le cas newtonien, on ait une bonne dégénérescence des coefficients aux endroits où une seule phase est présente. Ainsi, on pourra tout aussi bien considérer des mélanges de deux phases visco-élastiques que des mélanges ou l'un des deux phases (ou même les deux !) est newtonienne.

La dernière étape de la modélisation consiste à rassembler les équations trouvées et à les adimensionner à l'aide de grandeurs caractérisant l'écoulement : le nombre de Peclet $\mathcal{P}e$, le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$, le nombre capillaire $\mathcal{K}$ et le nombre de Weissenberg $\mathcal{W}e$. Les nombres δ et α représentant le contraste de densité et la taille de l'interface, le système s'écrit :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\rho(\varphi) = 1 - \delta\frac{1-\varphi}{2},\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e}\,\mathrm{div}\left(\frac{B(\varphi)}{\rho}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\right) = 0,\\
&\mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi),\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v\right) - \frac{1}{\mathcal{R}e}\,\mathrm{div}\left(2\eta(\varphi)(1-r(\varphi))D(v)\right) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma\\
&\qquad\qquad = \rho\mathbf{g} + \delta\mathcal{K}\frac{1-\varphi^2}{4}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right) + \mathcal{K}\mu.\nabla\varphi,\\
&\mathrm{div}\,(v) = 0,\\
&\frac{D\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\mathcal{W}e(\varphi)} = \frac{2\eta(\varphi)r(\varphi)}{\mathcal{W}e(\varphi)}D(v).
\end{aligned}
\right.
$$

Avant toute étude mathématique ou numérique, il faut s'assurer que l'on a bien rempli un des points importants du cahier des charges, à savoir que le système dégénère convenablement dans les cas suivants :

- Lorsqu'un seul fluide est présent (cas monophasique), le modèle se comporte exactement comme les modèles de type Oldroyd [67]. En effet, il suffit de remarquer que les constantes $\varphi = 1$ ou $\varphi = -1$ sont solutions de l'équation de Cahn-Hilliard (1), et que les autres équations décrivent exactement le cas monophasique (les paramètres η, r, λ, μ et ρ étant ceux de la phase considérée).
- Lorsque les deux phases sont newtoniennes alors on retrouve le modèle proposé par Franck Boyer [11].

- Seconde partie -

Etude mathématique du modèle

Dans cette seconde partie, on décrit les résultats théoriques obtenus. L'accent est mis sur le caractère non newtonien. En particulier, on étudie un modèle simplifié dans lequel la densité des deux phases est la même et la mobilité $B(\varphi)$ ne dégénère pas. Dans les cas plus généraux, par exemple lorsque les deux phases ont des densités différentes, on pourra consulter les travaux de F. Boyer [11] traitant du cas newtonien.

Dans une première approche (chapitre 3), on a travaillé avec un modèle de fluide visco-élastique proposé par A.W. El-Kareh et L.G. Leal [29] contenant un terme additif diffusif en contrainte $\varepsilon\Delta\sigma$, $\varepsilon > 0$.

Néanmoins, la plupart des travaux concernant les fluides visco-élastiques, aussi bien du point de vue physique [36, 49] que du point de vue mathématique [33, 43, 50], sont effectués sans tenir compte de ce terme additif. Il est donc important d'obtenir des résultats théoriques dans le cas $\varepsilon = 0$. Cette étude fait l'objet du chapitre 4.

Au vu des chapitres 3 et 4, il est naturel de se demander ce qu'il se passe lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Dans le chapitre 5, on étudie le comportement des solutions pour ε petit, faisant apparaitre une couche limite en espace.

Chapitre 3 - Présence d'un terme diffusif en contrainte

Du point de vue mathématique, le domaine d'étude est un ouvert borné Ω de l'espace (en dimension 2 ou 3). Le bord de ce domaine est noté Γ alors que n désigne la normale sortante à ce bord. On se place dans le cas où les deux fluides ont même densité ($\rho(\varphi) = 1$). En tenant compte du terme supplémentaire $\varepsilon\Delta\sigma$ dans la loi constitutive, le modèle considéré s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v - 2\,\mathrm{div}\,(\eta(\varphi)D(v)) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma = -\alpha^2\Delta\varphi\nabla\varphi,\\
&\mathrm{div}\,v = 0,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi - \mathrm{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = 0,\\
&\mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi),\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v.\nabla\sigma - W(v).\sigma + \sigma.W(v) + a(D(v).\sigma + \sigma.D(v)) + l(\varphi)\sigma + \varepsilon\Delta\sigma = \nu(\varphi)D(v),\\
&\varphi(0) = \varphi_0, \quad v(0) = v_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0,\\
&\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial \mu}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial \sigma}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad v|_\Gamma = h \quad \text{avec } h.n = 0.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dans la loi constitutive, on peut reconnaître la dérivée objective du 2-tenseur σ est donnée par

$$\frac{D_a\sigma}{Dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + v.\nabla\sigma + g_a(\sigma, v) \quad , \qquad a \in [-1;1] \tag{4}$$

$$\begin{array}{llll} g_a : & \{\text{2-tenseur}\} \times \{\text{1-tenseur}\} & \longrightarrow & \{\text{2-tenseur}\} \\ & (\ \sigma\ ,\ v\ ) & \longmapsto & -W(v).\sigma + \sigma.W(v) + a(D(v).\sigma + \sigma.D(v)). \end{array}$$

Sous des hypothèses de mobilité non dégénérée ($B(\varphi) > 0$) et de potentiel "presque polynomial", on prouve au cours du chapitre 3 l'existence locale et l'unicité d'une solution forte au problème (3) aussi bien dans le cas de la dimension $d = 2$ que de la dimension $d = 3$:

Théorème 1
Pour toutes données $h \in H^{\frac{d+1}{2}}(\Gamma)$ telle que $h.n = 0$ (vitesse imposée au bord du domaine), $v_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\operatorname{div} v_0 = 0$, $\varphi_0 \in H^2(\Omega)$ et $\sigma_0 \in H^1(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites, il existe $T^* > 0$ et une unique solution (φ, v, σ) du système (3) tels que

$$\begin{aligned} &\varphi \in L^2(0,T^*;H^4(\Omega)) \cap L^\infty(0,T^*;H^2(\Omega)), \\ &v \in L^2(0,T^*;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T^*;H^1(\Omega)), \\ &\sigma \in L^2(0,T^*;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T^*;H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, on s'attend à obtenir de meilleurs résultats en dimension 2. Malheureusement les non linéarités de la loi constitutive empêchent de tels résultats. Néanmoins, dans le cas particulier $a = 0$, on arrive à contourner ces difficultés :

Théorème 2 (Le cas $a = 0$)
Pour toutes données $h \in H^{\frac{d+1}{2}}(\Gamma)$ telle que $h.n = 0$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ telle que $\operatorname{div} v_0 = 0$, $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ et $\sigma_0 \in L^2(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites, et si $a = 0$ dans (4) alors il existe une solution (φ, v, σ) du système (3) telle que

$$\begin{aligned} &\varphi \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^3(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;H^1(\Omega)), \\ &v \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^1(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;L^2(\Omega)), \\ &\sigma \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^1(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Corollaire 1 (Le cas $a = 0$ en dimension 2)
Pour toutes données $h \in H^{\frac{d+1}{2}}(\Gamma)$ telle que $h.n = 0$, $v_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\operatorname{div} v_0 = 0$, $\varphi_0 \in H^2(\Omega)$ et $\sigma_0 \in H^1(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites, et si $a = 0$ dans (4) alors il existe une unique solution (φ, v, σ) du système (3) telle que

$$\begin{aligned} &\varphi \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^4(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;H^2(\Omega)), \\ &v \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^2(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;H^1(\Omega)), \\ &\sigma \in L^2_{loc}(0,+\infty;H^2(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Chapitre 4 - Résultats sans le terme diffusif en contrainte

A l'exeption des résultats obtenus pour $a = 0$, les méthodes mises en place dans le chapitre précédent ne sont plus concluantes lorsque le terme diffusif $\varepsilon\Delta\sigma$ n'est plus présent. On s'est donc inspiré des travaux de C. Guillopé et J.C. Saut concernant les écoulements monophasiques visco-élastiques pour obtenir nos résultats. Une méthode de point fixe permet de controler les termes non linéaires au prix d'une forte régularité sur les données initiales :

Théorème 3 (Le cas $\varepsilon = 0$)
Pour toutes données $h \in H^{\frac{d+3}{2}}(\Gamma)$ telle que $h.n = 0$, $v_0 \in H^2(\Omega)$ telle que div $v_0 = 0$, $\varphi_0 \in H^4(\Omega)$ *vérifiant les conditions aux limites et $\sigma_0 \in H^2(\Omega)$, il existe $T^* > 0$ et une unique solution (φ, v, σ) du système* (3) *avec $\varepsilon = 0$ tels que*

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^\infty(0,T^*;H^4(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^6(\Omega)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^2(\Omega)),\\
&v \in L^\infty(0,T^*;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^3(\Omega)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^1(\Omega)),\\
&\sigma \in L^\infty(0,T^*;H^2(\Omega)), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \in L^\infty(0,T^*;H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de l'existence globale, on ne peut pas espérer obtenir de solutions fortes en dimension 3 compte tenu du fait que le problème n'est à l'heure actuelle pas résolu pour le seul problème de Navier-Stokes ! Dans le cas de la dimension 2, l'équation de Navier-Stokes n'est plus un obstacle (voir par exemple [25, 83, 85] mais aucun résultat de type existence globale (avec données quelconques) n'ait connu pour les modèles monophasiques visco-élastiques. On va donc se restreindre ici au cas où les données sont petites. Dans ce cadre, les résultats connus actuellement sont plus nombreux non seulement concernant l'existence d'une solution forte globale pour l'équation de Navier-Stokes mais aussi pour un système couplant l'équation de Navier-Stokes et la loi constitutive d'Oldroyd (voir par exemple [32, 44]). Dans [44], C. Guillopé et J.C. Saut prouvent l'existence globale à données petites en supposant en outre que le fluide est peu visco-élastique (ce qui revient pour nous à imposer ν petit, et ce qui physiquement ne semble pas raisonnable). Dans [32], E.F. Cara, F. Guillen et R.R. Ortega s'affranchissent de cette hypothèse mais prouvent seulement une existence sur $[0, T]$ pour tout T (pour des données plus petites que $f(T)$, où f tend vers 0 lorsque T augmente...). On va dans cette partie prouver que cette hypothèse de fluide "faiblement" visco-élastique peut être supprimée. Par ailleurs, on se place toujours dans le cas diphasique et il faut donc supposer que les données en φ sont "petites". Plus précisément, lorsque l'on parlera de données petites, on supposera que φ_0 est proche d'une constante ω telle que $F''(\omega) > 0$ (cette hypothèse est classique, on dit que ω est un état métastable pour le potentiel F).

Théorème 4
Soit w un point métastable pour F. Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, si en outre h, u_0, σ_0 et $\varphi_0 - \omega$ sont petits dans leur espace alors le résultat est vrai sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $\|u\|_{H^2(\Omega)}$, $\|\sigma\|_{H^2(\Omega)}$ et $\|\varphi - \omega\|_{H^3(\Omega)}$ restent petits.

Le dernier résultat de ce chapitre concerne la régularité à tous ordres des solutions du système (3).

Dans le chapitre suivant, on va mettre en place une méthode (méthode B.K.W.) nécessitant beaucoup de régularité sur les solutions du système (3). De plus, le chapitre suivant ne concernant que les fluides monophasiques, nous nous sommes restreint ici à un tel cas bien qu'il semble fort probable que le résultat de régularité à tous ordres soit encore valable pour des fluides diphasiques. Plus précisement, on a

Théorème 5
Soit $k \geq 2$. Si $u_0 \in H^k$ est à divergence nulle et si $\sigma_0 \in H^k$, $\varphi_0 = 1$ alors il existe $T^* > 0$ tel que le problème (3), *$\varepsilon = 0$ admette une solution du type $(\varphi = 1, u, \sigma)$ telle que*

$$u \in L^\infty(0,T^*;H^k(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^{k+1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad \sigma \in L^\infty(0,T^*;H^k(\Omega)).$$

De plus, la solution satisfait les estimations sur les dérivées en temps suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall s \in \mathbb{N}, s \leq \frac{k}{2},\ u^{(s)} \in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s}(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^{k-2s+1}(\Omega)),\\
&\forall s \in \mathbb{N}, s \leq \frac{k}{2},\ \sigma^{(s)} \in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s}(\Omega)).
\end{aligned}$$

En toute rigueur, les données initiales doivent vérifier des conditions de compatibilité. Ces relations sont en fait des conditions nécessaires à l'existence d'une solution et sont détaillées dans le chapitre 4 (voir les équations (IV.5.2)).

Chapitre 5 - Un phénomène de couches limites

Dans le chapitre 3, on a étudié un modèle comportant un terme diffusif $\varepsilon\Delta\sigma$, $\varepsilon > 0$. Le chapitre 4 a traité le cas $\varepsilon = 0$. Il est alors naturel de se demander si les solutions du chapitre 3 convergent vers celles du chapitre 4 lorsque ε tend vers 0.

Ce problème est indépendant du caractère diphasique et on se restreint dans ce chapitre au cas monophasique. Il suffit par exemple de choisir $\varphi = 1$ dans les systèmes précédents. Plus précisement, on s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \text{ div } \sigma^\varepsilon, \\ \\ \text{div } u^\varepsilon = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon.\nabla \sigma^\varepsilon + g(\sigma^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + \sigma^\varepsilon - \varepsilon\Delta\sigma^\varepsilon = D(u^\varepsilon), \\ \\ u^\varepsilon(0) = u_{init}, \quad \sigma^\varepsilon(0) = \sigma_{init}, \end{cases}$$

avec conditions aux limites de type Neumann pour la contrainte et Dirichlet pour la vitesse :

$$u^\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.$$

La seule obstruction à une convergence de $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ lorsque le paramètre de viscosité ε tend vers 0 peut venir des conditions aux limites $\partial_n \sigma^\varepsilon\big|_\Gamma = 0$, conditions qui n'ont pas de raison d'être vérifiées par la solution (u^0, p^0, σ^0) correspondant au cas $\varepsilon = 0$.

Suite aux travaux d'O. Guès [42] et d'E. Grenier [39], on sait que l'on doit chercher un développement asymptotique de la solution sous la forme

$$\text{solution}^\varepsilon(t,x) = \text{solution}^0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,\text{profil}_1\left(t, x, \frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon\,\text{profil}_2\left(t, x, \frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + ...$$

où $d(x)$ représente la distance du point $x \in \Omega$ au bord Γ. Le théorème obtenu s'énonce ainsi :

Théorème 6
Si $u_{init} \in H^4(\Omega)$ est telle que div $u_{init} = 0$ *et si $\sigma_{init} \in H^4(\Omega)$ alors il existe un temps $T > 0$ et deux fonctions $P \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega \times \mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+))$ et $\Sigma \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+))$ tels que, sur $[0,T] \times \Omega$, on ait*

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, w(t,x), \\ p^\varepsilon(t,x) = p_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, P\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} q(t,x), \\ \sigma^\varepsilon(t,x) = \sigma_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, \Sigma\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, \tau(t,x). \end{cases}$$

Les fonctions w, q et τ vérifient :

$$\begin{aligned}
&w \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
&q \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
&\tau \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \varepsilon\tau \in L^2(0,T;H^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Remarque 1

- *Comme pour le théorème de régularité à tous ordres, pour obtenir un tel développement on a besoin de données initiales u_{init} et σ_{init} vérifiant des relations de compatibilité.*
- *Les fonctions P et Σ introduites ci-dessus sont des profils de couche limite. Plus précisemment, ils sont significatifs uniquement près du bord, c'est à dire qu'ils sont à décroissance rapide en la troisième variable (variable rapide $d(x)/\sqrt{\varepsilon}$).*

- Troisième partie -

Etude numérique du modèle

Les exemples de fluides non newtoniens abondent dans la nature et l'industrie. La plupart des liquides des corps vivants tel que le sang et les mucus sont non newtoniens et quantité de produits alimentaires le sont aussi : blancs d'oeuf, fromages fondus et chocolats fondus en sont des exemples. La pâte utilisée pour la fabrication du papier est non newtonienne, ainsi que le plastique fondu et d'autres produits industriels qui entrent dans la composition de nombreux textiles à travers des processus d'extrusion, moulage, soufflage, filage... L'industrie des détergents ajoute des polymères aux shampooings, gels, agents nettoyants pour améliorer leurs propriétés rhéologiques. L'industrie automobile est aussi concernée par les fluides non newtoniens : les huiles multigrades ont des polymères comme additifs pour modifier le comportement de leur viscosité sous des contraintes de pression et de température extrêmes.

Il est donc nécessaire de connaître le comportement des matières non newtoniennes non seulement du point de vue expérimental, mais aussi du point de vue numérique. En effet, grâce aux développements récents de l'informatique et de l'analyse numérique, la mécanique des fluides numériques est en passe de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux. Plus souple, plus facile à réaliser et surtout plus économique, elle permet d'aborder des expériences délicates, voire impossible à reproduire en laboratoire.

Cette troisième partie va donc dans ce sens. On a mis en oeuvre un schéma numérique bidimensionnel par différences finies qui permet de réaliser de nombreux tests proches des expériences réalisées en laboratoire.

Chapitre 6 - Schémas numériques

Le schéma numérique proposé a été réalisé en collaboration avec F. Boyer. La base de ce code correspond à celui développé par F. Boyer au cours de sa thèse [11] au sujet des écoulements diphasiques newtoniens. Là encore, l'accent est donc mis sur le caractère non newtonien et par conséquent sur la discrétisation de la loi constitutive d'Oldroyd.

Dans la première partie de ce chapitre, on décrit la discrétisation en temps. Une méthode à pas fractionnaire permet de découpler l'équation de Cahn-Hilliard, celles de Navier-Stokes et la loi constitutive d'Oldroyd. Au cours de chacune de ces trois étapes, les termes diffusifs sont traités séparément.

L'équation de Cahn-Hilliard est discrétisée en temps à l'aide d'un θ-schéma. On choisit $\theta = 0.6$, d'un part pour assurer la stabilité (en effet, on n'a pas de condition de type C.F.L. dès que $0.5 \leq \theta \leq 1$), d'autre part pour avoir une méthode d'ordre "presque" 2 (la méthode serait d'ordre 2 si $\theta = 0.5$). Le système ainsi obtenu par cette méthode semi-implicite est alors résolu par un point fixe qui converge généralement assez vite.

Les équations de Stokes sont approchées de façon implicite pour les termes de pression de sorte que l'on est ramené à la résolution d'un problème de Stokes généralisé. Il est résolu par une méthode de lagragien augmenté.

La loi constitutive d'Oldroyd est une équation linéaire en contrainte. On connait donc une expression de la solution sous forme intégrale et on propose un schéma de type "exponential-fitting" (voir [31], chapitre 5 pour un exemple d'application d'un tel schéma). Pour justifier ce type de schéma, nous nous sommes attachés à démontrer des résultats de stabilité ; ces résultats sont obtenus par des méthodes de type méthode d'énergie.

Les termes de transport : Afin d'éviter une trop grande diffusion due à ces termes, on a implémenté des méthodes plus performantes que le schéma décentré amont. F. Boyer a étudié au cours de sa thèse les avantages d'un schéma anti-diffusif proposé par P. Rasetarinera [15]. Ce schéma a été utilisé pour le terme de transport de l'interface ($v.\nabla\varphi$) et apporte effectivement une amélioration réelle des résultats.

L'inconvénient majeur de ce type de schéma est que son stencil est assez large. Ainsi, il est assez fastidieux de l'implémenter sur les termes d'inertie $v.\nabla v$. On propose dans le chapitre 6, un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3 permettant de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus avec le schéma de P. Rasetarinera tout en ayant un stencil assez fin. Cette méthode a donc été utilisée aussi bien pour le transport en vitesse que pour le transport de la contrainte.

Du point de vue qualitatif, le schéma doit être conservatif et L^∞-stable pour préserver, par exemple, les propriétés de l'équation de Cahn-Hilliard et assurer que les valeurs de φ restent dans l'intervalle de valeurs physiquement admissibles (c'est-à-dire $[-1, 1]$). Pour cela, en écrivant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, on distingue les termes diffusifs des termes anti-diffusifs et on utilise des limiteurs de flux.

Chapitre 7 - Applications et résultats

On peut distinguer deux classes d'essais numériques qui ont été réalisées avec ce code aux cours de ces travaux.

- Ceux permettant de confirmer la pertinence du modèle en comparant les résultats avec ceux réalisés en laboratoire.
- Et les essais numériques ne pouvant pas être réalisés facilement en laboratoire pour cause de coût trop important, gros volume...

Quelques exemples de ces différentes applications font l'objet de ce dernier chapitre :

• **Comparaison avec les expériences réelles**

Toute cette étude a été motivée par une forte collaboration entre le laboratoire du Centre de Recherche Paul Pascal (C.R.P.P.) de Bordeaux et l'équipe "méca. flu." du laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux. L'un des objectifs était d'obtenir des modèles pertinents pouvant reproduire numériquement les expériences physiques. On a donc effectué en parallèle des tests d'étirements de fibres. La concordance des résultats permet d'une part de valider le modèle choisi, d'autre part d'envisager numériquement des tests difficilement réalisables en laboratoire.

• **Applications industrielles ...**

En effet, pouvoir réaliser des tests numériques avant de se lancer dans des expériences coûteuses est un challenge important pour l'ensemble de la communauté scientifique, que ce soit dans le milieu médical, ou dans les milieux plus industriels. Nous présentons donc, en dernier lieu, des tests de remplissage de cuve ayant pour but de “voir à travers les pièces sans les découper !”.

Première partie

Modélisation d’un écoulement diphasique visco-élastique

Introduction

Le sujet de cette première partie est de construire un modèle pour l'étude théorique et numérique des écoulements de mélanges de deux fluides visco-élastiques. Trois thèmes se dégagent naturellement : d'une part la modélisation de l'écoulement, d'autre part la prise en compte du mélange de deux fluides et enfin le caractère visco-élastique.

– La modélisation de l'écoulement : cette étape permet de prendre en compte les phénomènes hydrodynamiques et le modèle de Navier-Stokes incompressible est tout à fait adapté à ce type de problème.

– Un mélange de deux fluides : la difficulté ici est de caractériser l'interface entre les deux phases. Suite aux travaux de F. Boyer [11], on a opté pour un modèle à interface diffuse (en opposition aux modèles à interface ponctuelle [82]). C'est donc un modèle de type Cahn-Hilliard qui permet de prendre en compte les phénomènes d'interface. L'interface est modélisée *via* le choix d'un paramètre d'ordre (correspondant par exemple à la fraction volumique de l'une des phases) et d'une énergie libre. Cette énergie, dite de Cahn-Hilliard, rend compte de l'excès d'énergie à l'interface dû aux fortes variations de la composition du mélange dans cette zone [20, 69].

– Pour ce qui est du caractère visco-élastique, il existe à la fois des lois intégrales et des lois différentielles (voir [26, 51]). Pour des questions de coût de calcul, nous avons opté pour un modèle différentiel. A. Colin (Centre de Recherche Paul Pascal) a collaboré au choix des modèles de type Oldroyd ou Maxwell [49, 67] : les fluides complexes qu'elle étudie en laboratoire ont des propriétés qui sont généralement bien prises en compte par ce type de loi.

L'objet de cette partie est de coupler ces trois classes de modèles afin d'obtenir un ensemble d'équations décrivant des écoulements diphasiques visco-élastiques ou non. Notons que de nombreux travaux ont déjà été réalisés concernant des fluides visco-élastiques (monophasiques) associant ainsi le modèle de Navier-Stokes incompressible à celui d'Oldroyd [44, 49, 50]. D'autre part, quelques modèles décrivent des écoulements diphasiques (non visco-élastiques) [11, 20, 69]. Les travaux présentés dans la suite regroupent les trois phénomènes.

De nombreuses applications physiques sont en jeu. Par exemple, lors de la mise en forme de matériaux polymères, des instabilités d'écoulement peuvent limiter le taux de production ou altérer la qualité d'un produit. Le recours à des équipes de physiciens et de chimistes est donc essentiel dans le choix d'un modèle cohérent. Des expériences menées en parallèle avec nos simulations numériques (voir le chapitre 7) ont permis de s'assurer de la pertinence du modèle proposé et justifient *a posteriori* la validité des simplifications effectuées.

Chapitre 1

Modélisation d'un mélange

Il s'agit dans ce chapitre d'introduire un modèle d'écoulement diphasique. On se consacre tout d'abord à la description de l'interface puis à l'hydrodynamique sans tenir compte du caractère non newtonien. Ce point précis faisant l'objet du chapitre suivant.

1 Mélange diphasique à interface diffuse

Le but de ce premier paragraphe est principalement d'introduire des notations qui seront utilisées par la suite. Néanmoins, il est important de noter que les choix qui vont être fait ne sont pas les seuls possibles et on essayera de mettre en avant les avantages et inconvénients des différentes options.

Notations et grandeurs moyennes

Le modèle que l'on met en place est un modèle de fluide diphasique, c'est-à-dire comportant deux phases. Pour plus de clareté, on distingue les deux phases (ainsi que toutes les quantités qui sont rattachées à chacune d'elles) en les appelant "phase 1" et "phase 2". Durant toute cette thèse, on suppose que chacun des deux constituants est incompressible et on note ρ_1^0 et ρ_2^0 leurs densités respectives. Bien que chaque phase soit incompressible, il est essentiel de noter que le mélange ne l'est pas. Dans la littérature, de tels écoulemenents sont parfois appelé "quasi-incompressibles" (voir par exemple [59]).

Une autre hypothèse qui sera implicite pendant toute la suite est le fait que la température est supposée constante. On verra qu'elle intervient comme paramètre lorsque l'on définit les potentiels chimiques liés à chaque phase mais généralement on ne tiendra pas compte de ces variations bien qu'il est clair que d'un point de vue physique les effets thermo-mécaniques ne sont pas négligeables :par exemple, une barre chauffée s'allonge et inversement si on allonge une barre, elle s'échauffe !

Afin de décrire un profil de concentration continu en espace et en temps, on définit la fraction volumique d'une des phases dans le mélange. Posons par exemple

$$\Phi = \Phi(t,x) = \frac{dV_1}{dV},$$

où dV_1 est le volume occupé par la phase 1 dans le volume élémentaire dV (voir figure I.1.1). On suppose implicitement que le volume élémentaire dV ne contient pas de vide, c'est-à-dire que $dV = dV_1 + dV_2$ de sorte que la quantité Φ prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

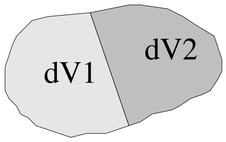


FIG. I.1.1: Volume élémentaire dV

Il est alors intéressant d'introduire la densité de chaque phase au sein du mélange en posant

$$\rho_1 = \Phi\rho_1^0, \qquad \rho_2 = (1-\Phi)\rho_2^0.$$

On note alors que la densité totale du fluide peut être définie par $\rho = \rho_1 + \rho_2$ et que, comme on l'a signalé auparavant, elle n'est pas constante au sein du mélange.

En ce qui concerne la vitesse, plusieurs choix peuvent être faits. Si on se donne les vitesses v_1 et v_2 de chacune des deux phases alors on peut définir la vitesse moyenne soit comme une moyenne massique des deux vitesses :

$$\rho v^* = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2,$$

soit comme une moyenne volumique :

$$v = \Phi v_1 + (1-\Phi) v_2.$$

Il est clair que le choix que l'on fait ici aura une très grande influence sur la suite des travaux. Certains auteurs comme J.S. Lowengrub et L. Truskinovsky [59] ont travaillé avec une moyenne massique et ont pu établir certains résultats concernant les transitions topologiques (en traitant comme exemple l'annihilation d'une goutte immergée dans un autre fluide). L'avantage d'un tel choix est de pouvoir traiter de façon assez similaire les cas où les deux phases sont elles-mêmes compressibles. Dans le cas qui nous intéresse, les deux phases sont incompressibles (c'est ce que J.S. Lowengrub et L. Truskinovsky appellent le cas quasi-incompressible) et une moyenne volumique de la vitesse a l'avantage de conserver la condition d'iso-volume "div $v = 0$". On va voir que cette relation est en effet directement liée au choix de la vitesse moyenne et sera très utile dans les utilisations ultérieures du modèle.

Avant de décrire des lois de comportement sur les grandeurs introduites, on définit la vitesse relative entre les deux phases :

$$w = v_1 - v_2.$$

On montrera que cette grandeur peut s'exprimer directement à l'aide de la fraction volumique Φ (modulo des approximations que l'on justifiera) et disparait des équations finales.

Finalement, comme le font de nombreux auteurs [9, 20, 30], le paramètre d'ordre utilisé ne sera pas Φ mais une renormalisation définie par

$$\varphi = 2\Phi - 1,$$

de telle sorte que φ varie entre -1 et 1, valant 1 aux points où seule la phase 1 est présente, -1 aux points où seule la phase 2 est présente. Remarquons que ceci ne change en rien les résultats obtenus et que certains auteurs travaillent avec la variable Φ (voir par exemple les travaux de M. Doi [27]).

La loi de conservation de la masse

Pour décrire l'évolution du paramètre d'ordre φ, on utilise les lois de conservation de la physique. Tout d'abord la loi de conservation de la masse qui s'écrit pour chacune des deux phases sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div } (\rho_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

En divisant chaque équation par ρ_i^0 puis en additionnant les deux équations obtenues, on en déduit, en utilisant la définition de la vitesse par moyenne volumique

$$\text{div } (v) = 0. \tag{I.1.1}$$

C'est-à-dire, comme annoncé plus haut, que le champ de vitesse moyen tel qu'il a été défini, satisfait la contrainte de divergence nulle très usuelle dans le cadre incompressible monophasique.

En utilisant cette propriété et le fait que l'on peut exprimer v_1 (par exemple) à l'aide de v et w par la relation $v_1 = v + \frac{1-\varphi}{2} w$, l'équation de conservation de la masse pour la phase 1 se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi + \text{ div } \left(\frac{1-\varphi^2}{2} w\right) = 0. \tag{I.1.2}$$

L'équation d'évolution obtenue sur le paramètre d'ordre φ contient deux termes essentiels qui décrivent les deux phénomènes participant au mouvement de l'interface. Le premier est le fait que le mélange est soumis à un écoulement caractérisé par le champ de vitesse moyen v, ce qui justifie pleinement le terme de transport $v.\nabla\varphi$. Quant au second, il s'agit d'un phénomène de diffusion à travers l'interface, dont le flux est proportionnel à la perturbation en vitesse $w = v_1 - v_2$. On s'attend à ce que le flux de diffusion soit proportionnel au gradient du potentiel chimique du mélange et c'est effectivement ce que l'on va retrouver par la suite.

Remarque I.1.1
Ainsi définie, la densité ρ ne satisfait pas une équation de conservation de la masse classique. Plus précisement, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{ div } (\rho v) = \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{4} \text{div } ((1-\varphi^2)w).$$

Cette relation a une influence importante dans l'optique du traitement mathématique et numérique des équations.

2 Hydrodynamique et équations en vitesses

Les phénomènes hydrodynamiques dont on veut rendre compte vont être décrits par l'équation d'évolution de la vitesse moyenne du mélange. Dans cette optique, on va utiliser les équations de conservation de la quantité de mouvement associées à chaque phase et essayer d'en déduire des équations "moyennes" sur les vitesses v et w.

Dans chaque phase, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial (\rho_i v_i)}{\partial t} - \text{ div } (\Sigma_i) + \text{ div } (\rho_i v_i \otimes v_i) = F_i, \quad i = 1, 2 \tag{I.2.1}$$

où Σ_i et F_i correspondent respectivement aux tenseurs des contraintes et aux forces extérieures appliquées à la phase i ($u_1 \otimes u_2$ désignant le produit tensoriel de deux vecteurs).

Le tenseur des contraintes

Généralement, on décompose le tenseur des contraintes de Cauchy (noté ici Σ_i) en une somme de deux termes, d'une part la pression hydrostatique $p_i Id$, d'autre part le tenseur des contraintes τ_i.

$$\Sigma_i = -p_i Id + \tau_i.$$

Dans le cadre de cette thèse, on envisage uniquement les cas où les efforts intérieurs sont des efforts de contact. En conséquence, le tenseur des contraintes est symétrique (voir [36], p. 63).

Dans la suite, on suppose que l'on peut définir la pression totale p ainsi que le tenseur des contraintes totales τ par les relations suivantes :

$$p_1 = \frac{1+\varphi}{2}p, \quad p_2 = \frac{1-\varphi}{2}p, \quad \tau_1 = \frac{1+\varphi}{2}\tau, \quad \tau_2 = \frac{1-\varphi}{2}\tau.$$

On peut d'ores et déjà remarquer que la contrainte globale est égale à la somme des contraintes agissant sur chaque phase : $-pId + \tau = (-p_1 Id + \tau_1) + (-p_2 Id + \tau_2)$.

Les forces extérieures

Les forces extérieures agissant sur une phase sont de trois types.

• Tout d'abord il y a la force de gravité qui s'exerce sur les deux phases de la même manière, proportionnellement à leur densité (le vecteur désignant la gravité est noté g). Plus généralement de telles forces pourront décrire des forces volumiques extérieures quelconques.

• Ensuite, des termes de frottements entre les deux phases doivent être considérés. Ceux-ci doivent naturellement être proportionnels à la vitesse relative entre les deux phases (rappelons que cette vitesse est notée w) et dans des directions opposées selon que l'on se trouve dans une phase ou dans l'autre. Ces types de forces n'ont lieu qu'aux interfaces entre les deux phases. On écrit alors cette force $\pm\xi(\varphi)w$ où ξ est appelé le coefficient de friction et doit s'annuler quand une seule phase est présente.

• Les dernières forces que l'on considère sont celles dues aux interactions chimiques entre les deux phases. En effet, chaque phase possède son propre potentiel chimique μ_i qui peut être déterminé en se basant sur les travaux de J.W. Cahn et J.E. Hilliard ([16, 17]) et ceux de A. Onuki ([69] p. 6138 et 6146) :

$$\mu_1 = \mu_0(\varphi) + \frac{1-\varphi}{2\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right), \quad \mu_2 = \mu_0(\varphi) - \frac{1+\varphi}{2\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right).$$

Le potentiel $\mu_0(\varphi)$ est le potentiel chimique du mélange uniforme théorique de composition φ. Les autres termes sont les termes d'échange qui caractérisent la non uniformité du mélange, celle-ci étant décrite par l'énergie libre $\mathcal{F}$ de type Cahn-Hilliard [20, 46, 69] :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_\Omega \frac{A}{2}|\nabla\varphi|^2 + E\,F(\varphi),$$

de sorte que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} = -A\Delta\varphi + E\,F'(\varphi), \tag{I.2.2}$$

A et E étant deux paramètres physiques décrivant l'interaction entre les deux phases. On verra lors de l'adimensionnement (partie 3, chapitre 2) que la quantité $\sqrt{A/E}$ mesure l'épaiseur de l'interface alors que le produit $\sqrt{AE}$ est lié à la tension de surface dû à l'excès d'énergie à l'interface. Les termes d'échange apparaissant dans les potentiels chimiques sont en fait issus de la définition usuelle des potentiels chimiques en thermodynamique comme la différentielle de l'énergie libre par rapport à la densité ρ_i de chaque constituant (voir [69]).

La fonction F qui intervient dans l'énergie libre, est appelée *potentiel de Cahn-Hilliard*. Un choix physiquement raisonnable pour ce potentiel F est donné par une expression de type logarithmique [27, 46] :

$$F(\varphi) = \theta_c(1-\varphi^2) + \theta\left((1+\varphi)\log(1+\varphi) + (1-\varphi)\log(1-\varphi)\right), \tag{I.2.3}$$

dans laquelle θ est la température du mélange dans les conditions de l'expérience et θ_c sa température critique. Pour que les deux phases soient séparées (c'est le cas intéressant), il faut bien sûr que $\theta < \theta_c$ ce qui, d'un point de vue mathématique, est équivalent à dire que le potentiel F n'est pas convexe.

Remarque I.2.1
En développant F en série entière, pour tout $\varphi \in]-1;1[$, on a

$$F(\varphi) = \theta_c - \theta_c\varphi^2 + \theta\sum_{k\geq 1}\left(\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}\right)\varphi^{2k}$$

et on déduit ainsi une expression approchée polynomiale pour le potentiel de la forme :

$$F(\varphi) = r\varphi^4 - u\varphi^2, \ \ r,u > 0. \tag{I.2.4}$$

On a retranché la constante θ_c mais ceci ne change en rien la valeur des potentiels chimiques où seule la dérivée du potentiel de Cahn-Hilliard apparait. D'autre part, les valeurs de r et u sont données par

$$r = \frac{\theta}{6}, \quad \text{et } u = \theta_c - \theta.$$

Enfin, il est bon de remarquer que le développement tronqué que l'on a effectué donne une approximation du potentiel logarithmique. C'est cette forme du potentiel de Cahn-Hilliard qui est la plus fréquemment utilisée dans la littérature, voir par exemple [83].

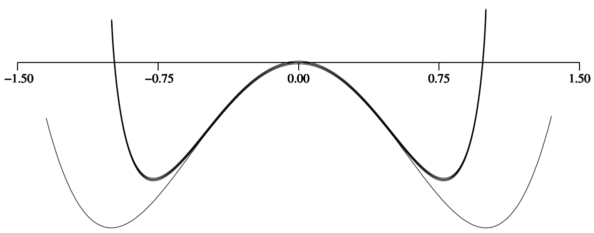


FIG. I.2.1: Le potentiel logarithmique (en gras) et le potentiel polynomial

Pour résumer, on a donc montré que les forces agissant sur chaque phase se mettent sous la forme

$$F_1 = -\rho_1\nabla\mu_1 + \rho_1 g - \xi(\varphi)w \quad , \quad F_2 = -\rho_2\nabla\mu_2 + \rho_2 g + \xi(\varphi)w.$$

Equation en vitesse

L'idée est maintenant d'obtenir, à partir des deux équations de conservation de la quantité de mouvement, deux équations régissant la vitesse moyenne v et la vitesse relative w. En additionnant les deux équations de conservation de la quantité de mouvement (I.2.1), on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) - \text{ div } (\Sigma_1 + \Sigma_2) + \text{ div } (\rho_1 v_1 \otimes v_1 + \rho_2 v_2 \otimes v_2) = F_1 + F_2.$$

Il suffit alors de remarquer que l'on peut écrire

$$v_1 = v + \frac{1-\varphi}{2} w \quad \text{et} \quad v_2 = v - \frac{1+\varphi}{2} w.$$

Les différentes sommes s'expriment en fonction des valeurs globales du mélange (voir par exemple [9]). On en déduit l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(\varphi)v + (\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{1-\varphi^2}{4} w\right) - \text{ div } (-pId + \tau) \\ &\quad + \text{ div } \left(\rho(\varphi) v \otimes v + (\rho_1^0 + \rho_2^0 - \rho(\varphi))\frac{1-\varphi^2}{4} w \otimes w + (\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{1-\varphi^2}{4}(v \otimes w + w \otimes v)\right) \\ &\qquad = -\rho(\varphi)\nabla\mu_0 + \rho(\varphi) g - (\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{1-\varphi^2}{4}\nabla\left(\frac{1}{\rho(\varphi)}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{I.2.5}$$

Equation en perturbation

Puisque les deux phases sont supposées incompressibles, on peut écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement sous forme non conservative :

$$\rho_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho_i v_i . \nabla v_i - \text{ div } (\Sigma_i) = F_i, \quad i = 1, 2. \tag{I.2.6}$$

En effectuant la combinaison linéaire $\rho_2(\text{I.2.6})_{i=1} - \rho_1(\text{I.2.6})_{i=2}$ on détermine une équation d'évolution sur la vitesse w. Comme précédemment, on utilise le fait que toutes les grandeurs caractérisant chaque phase peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs caractérisant le mélange. On en déduit

$$\begin{aligned} &\rho_1\rho_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \rho_1\rho_2\left(v.\nabla w + w.\nabla v - \varphi(w.\nabla w) - \frac{1}{2}(w.\nabla\varphi) w\right) \\ &\quad + (\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{1-\varphi^2}{4} \text{ div } (\tau - pId) - \frac{\rho}{2}(\tau - pId).\nabla\varphi \\ &\qquad = -\rho_1\rho_2\nabla\left(\frac{1}{\rho(\varphi)}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\varphi}\right) - \rho(\varphi)\xi(\varphi) w. \end{aligned} \tag{I.2.7}$$

Résumons

Au cours de ce chapitre, on a déterminé trois équations d'évolution, la première portant sur le paramètre d'ordre φ (équation (I.1.2)), les deux autres sur les vitesses v et w (équations (I.2.5) et (I.2.7)). De plus, on a obtenu une équation d'incompressibilité (I.1.1) qui permet de déterminer la pression hydrostatique p à une constante additive près.

De façon à clore le système, il ne reste plus qu'à déterminer une loi décrivant l'évolution de la contrainte τ. Le chapitre suivant va donc préciser cette loi dans le cas d'un mélange diphasique.

Chapitre 2

De la visco-élasticité...

Jusqu'à présent, nous sommes resté très vague sur le tenseur des contraintes. Dans ce chapitre, on va s'efforcer de mettre en place une loi constitutive pour ce tenseur permettant de modéliser une certaine classe de fluides non newtoniens.

1 Modèles visco-élastiques classiques dans le cas monophasique

Les effets visco-élastiques sont très importants dans de nombreuses applications industrielles. Ils correspondent à tous les phénomènes dont les comportements purement visqueux ou linéaires ne peuvent pas rendre compte. Ils peuvent être responsables de recirculations complexes qui ont un impact significatif sur la production, voir par exemple [51, 78, 86]. Un exemple classique est le procédé de renforcement de fibres par des matériaux polymères où la distribution et l'orientation des fibres déterminent les propriétés mécaniques du produit final.

Rhéologie : une "explication" du temps de relaxation

D'après l'*Encyclopædia Universalis*, la rhéologie est la science qui rend compte de l'écoulement et de la déformation des matériaux soumis à des forces mécaniques quelconques ($\rho\epsilon o\varsigma$ signifiant "courant"). Pour avoir une idée plus précise de ce qu'est la rhéologie, on peut lire dans l'ancien testament, verset des Juges 5 : 5,

"Les montagnes se sont écoulées devant Dieu."

De ce verset, adopté comme devise par la Société de Rhéologie [73], on peut déduire deux faits essentiels. Le premier étant que les montagnes se sont écoulées. Ce qui peut être surprenant car on est habitué à voir des fluides tel l'eau s'écouler mais certainement pas des montagnes. L'explication se trouve dans la deuxième partie de l'exégèse. Les montagnes se sont écoulées "devant Dieu". L'échelle du temps de Dieu n'est pas la notre. La durée de vie de l'être humain n'est pas assez étendue pour voir les montagnes s'écouler, et pourtant elles s'écoulent. On peut en déduire que la distinction entre solide et fluide n'est pas si nette qu'on peut le croire.

On peut caractériser la solidité ou fluidité d'un matériau grâce à ce que l'on appelera le nombre de Weissenberg (ou nombre de Deborah). Ce nombre est le rapport entre le temps de relaxation du matériau et le temps caractéristique d'observation. Il est infini pour un solide hookéen et nul pour un fluide newtonien. Mais il est clair par définition que les matériaux n'ont pas de nombre de Weissenberg associé : un matériau avec un temps de relaxation non nul peut se comporter comme un solide si le temps caractéristique du processus est petit, et réciproquement. Un exemple de materiau dont le comportement peut ressembler à un fluide ou un solide est donné dans [4]. C'est un matériau à base de silicone qui, s'il est laissé dans un récipient pendant un temps assez long va retrouver sa position de repos alors que si on jette violement ce matériau à terre, il peut aussi rebondir. Une montagne a incontestablement un temps de relaxation très long, mais si vous êtes prêt à attendre, vous la verrez s'écouler.

Bien évidemment, le comportement mécanique de nombreux fluides est bien décrit par la loi constitutive d'un fluide dit newtonien. Cette loi correspond au cas où le temps de relaxation est très grand devant celui de l'expérience. Néanmoins, d'autres fluides ont des comportements qui ne sont pas pris en compte par de telles lois. Parmi de tels fluides, on peut citer les solutions de polymères comme les peintures, les dentifrices, les argiles... Par la suite, on s'intéressera aux fluides ayant des propriétés rhéologiques différentes de celles des fluides newtoniens et en particulier à la classe des fluides visco-élastiques. De telles lois ont été validées dès que le fluide contient des macro-molécules (même en petite quantité). Leur dynamique non linéaire est fondamentalement différente de celles des fluides newtoniens. Deux propriétés sont principalement responsables de ce fait : la première est tout simplement le changement de viscosité, et la seconde correspond aux divers temps de relaxations qui sont associés aux polymères. Ces temps sont en général du même ordre de grandeur que les temps d'échelle du flot et permettent aux polymères de donner une "réponse" observable.

Il n'y a pas de loi de comportement universelle et la recherche de lois "raisonnables" est encore l'objet de travaux nombreux (voir par exemple [54]). On distingue deux classes de lois de comportement, les lois de type integral et les lois de type différentiel, obtenues par des considérations moléculaires ou de mécanique des milieux continus [26]. Les lois sous forme intégrale permettent de bien comprendre que les fluides visco-élastiques sont des fluides à mémoire : la valeur de la contrainte au temps présent dépend directement de l'histoire des déformations. Néanmoins, les modèles intégraux sont très couteux en temps de calcul pour la simulation numérique car ils nécessitent le calcul des trajectoires. C'est pourquoi on leur préfère les modèles différentiels. Nous allons voir par la suite comment on peut "construire" de tels modèle.

Une des premières idées qui fut développée pour schématiser un fluide est de considérer chaque "cellule" de fluide comme un complexe de masses et de ressorts [49].

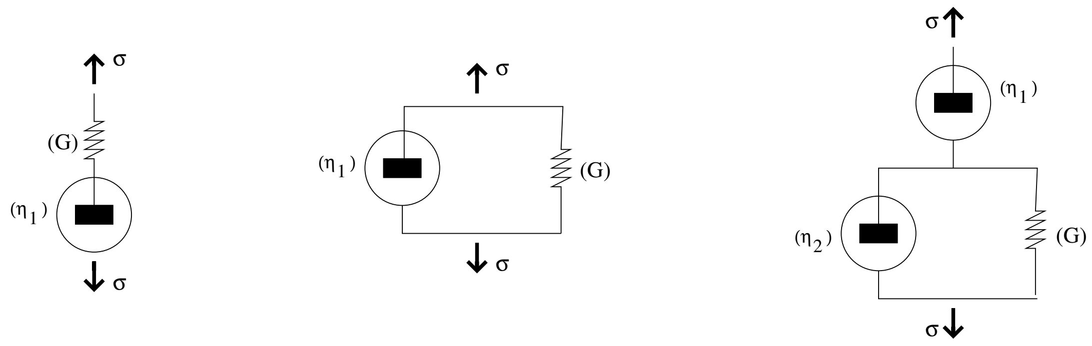


FIG. II.1.1: De gauche à droite, les cellules de Maxwell, Voigt et Jeffrey

Exemples de cellule

• La **"cellule" de Maxwell** (voir figure II.1.1) est constituée d'un ressort (de constante d'élongation G) et d'une masse (de viscosité η_1), les deux constituants étant montés en série. Les forces σ_1 et σ_2 appliquées respectivement au ressort et à la masse vérifient

$$\sigma_1 = G\gamma_1 \quad , \quad \sigma_2 = \eta_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t},$$

γ_1 et γ_2 étant les déformations respectifs des extrémités du ressort et de la masse. Le montage étant en série, les deux forces sont égales (notées σ) et on peut donc dire que la déformation totale γ vérifie les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{1}{G}\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\sigma_2}{\eta_1}$$

soit, en introduisant $\lambda = \eta_1/G$ (temps de relaxation),

$$\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Mais ce modèle est trop élastique pour rendre compte des phénomènes des fluides (par exemple, dans le cas d'une déformation constante non nulle γ, il est facile d'en déduire que la contrainte associée est donnée par $\sigma(t) = \sigma(0)e^{-t/\lambda}$)

• La **“cellule” de Voigt** propose de considérer le même couplage mais en parallèle. La force totale s'écrit alors :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = G\gamma + \eta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Contrairement au modèle de Maxwell, ce modèle n'est pas assez élastique (une déformation constante non nulle γ entraîne $\sigma = G\gamma$) et il est utilisé en général pour modéliser des solides visco-élastiques.

• Finalement, pour les fluides, on utilise la **“cellule” de Jeffrey** (1929) qui est un montage en série d'une cellule de Voigt et d'une masse (de viscosité η_2). Le taux de cisaillement total s'écrit

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}$$

alors que la force totale devient

$$\sigma = \eta_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = G\gamma_2 + \eta_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}$$

Par combinaisons on peut éliminer les déformations γ_1 et γ_2 pour obtenir, en posant $\lambda_1 = (\eta_1 + \eta_2)/G$ (temps de relaxation) et $\lambda_2 = \eta_2/G$ (temps de retard), l'équation suivante

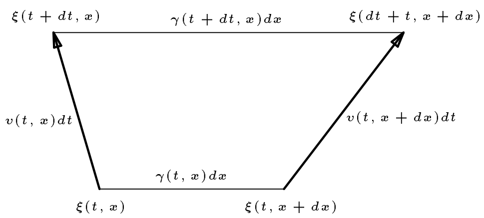
$$\lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right).$$

Remarque II.1.1
L'évolution de la déformation γ étant liée au champs de vitesse par la relation

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,x).$$

En effet, la déformation ainsi que la vitesse d'une cellule élémentaire peuvent définies à l'aide de la fonction $\xi(x,t)$ donnant, au temps t, la position de l'élément qui était initialement en position x (voir [49]). On a clairement les relations

$$\gamma(t,x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t,x) \quad \text{et} \quad v(t,x) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,x).$$



Le modèle de Jeffrey monodimensionnel se met alors sous la forme suivante

$$\lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right).$$

Remarque II.1.2

- *On retrouve le modèle de Maxwell lorsque le temps de retard est nul :* $\lambda_2 = 0$.
- *Pour les fluides newtoniens, on considère un modèle de Jeffrey où les temps de relaxation et de retard sont égaux (*$\lambda_1 = \lambda_2$*) et petits, voir [49].*
- *C'est la généralisation de ce modèle monodimensionnel aux tenseurs qui est appelé modèle d'Oldroyd [67].*

Généralisation aux tenseurs

Afin d'étendre ces lois aux cas multi-dimensionels, on introduit les tenseurs de déformation $D(u)$ et de vorticité $W(u)$ comme les parties symétriques et anti-symétriques du gradient de vitesse :

$$D(u) = \frac{\nabla u + (\nabla u)^t}{2}, \qquad W(u) = \frac{\nabla u - (\nabla u)^t}{2}.$$

On généralise le modèle de Jeffrey aux tenseurs τ de la façon suivante (voir [49], p.6 et 41) :

$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \tau = 2\eta \Big(D(u) + \tilde{\lambda} \frac{D}{Dt} D(u) \Big).$$

Ici $\frac{D}{Dt}$ représente une dérivée invariante par toutes transformations euclidiennes de façon à ce qu'elle ne soit pas liée au repère. Ceci repose sur une propriété essentielle : l'axiome d'objectivité des efforts intérieurs. Selon cet axiome, les efforts intérieurs sont indépendants du référentiel dans lequel le mouvement est observé ([36], p.67). Les modèles ne sont là non plus pas uniques et on va voir dans la section suivante quelques exemples classiques de telles dérivées.

Rappelons que dans le cas d'un fluide Newtonien, la loi constitutive s'écrit $\tau = 2\eta D(v)$. Il peut être intéressant de faire apparaître cette contribution dans l'expression d'une loi constitutive plus générale. On décompose donc le tenseur des contraintes en la somme de la contrainte newtonienne $2\eta \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} D(v)$ et de la contrainte purement élastique, notée σ que l'on nomme extra-contrainte. En introduisant le paramètre de retard $r = 1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}$, la loi constitutive devient

$$\tau = 2\eta(1-r)D(v) + \sigma, \quad \frac{D\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v). \tag{II.1.1}$$

Dérivées objectives

Plusieurs approches sont possibles pour comprendre la notion de dérivées objectives et leur non unicité. Le point de vue de D. D. Joseph (voir [49], p.10) consiste à décrire un vecteur (resp. un tenseur) le long d'une trajectoire en le décomposant dans des coordonnées locales de l'espace tangent $\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}\}_i$ (resp. de l'espace des tenseurs $\{\frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi_j}\}_{i,j}$) à la trajectoire. Quitte à changer de base, par exemple en prenant les bases duales, il obtient plusieurs dérivées invariantes. Le point de vue que l'on expose ici utilise des méthodes très courantes en mécanique des milieux continus.

Pour dériver un champ de vecteur le long d'une trajectoire, on peut introduire la dérivée particulaire ($d_t = \partial_t + u.\nabla$). Cette dérivée n'est plus objective pour les tenseurs, voir par exemple [49, 36]. En fait, la dérivée particulaire exprime une dérivée obtenue par transport parallèle.

Le plus naturel pour dériver un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par rapport au temps consiste à regarder la limite du taux d'accroissement

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{s\to 0} \frac{X(t+s) - X(t)}{s}.$$

Mais cette limite n'est pas caractéristique de la variation du champ de vecteurs au sein du milieu continu. En effet, si on veut suivre une particule qui se déplace sur une variété M (une courbe dans notre cas) au cours du temps, X est alors défini le long de M, ce qui signifie que $X(t) \in T_t M$ et que $X(t+s) \in T_{t+s}M$ et on ne peut pas, *a priori*, additionner de tels vecteurs. Il faut donc introduire une connexion entre les différents espaces tangents.

1.0.1 La dérivée convective

Pour comparer les configurations du système à deux instants t et t', il faut faire intervenir une application passant d'une configuration à l'autre. Dans un repère orthonormé fixé, on définit l'application f donnant les coordonnées du point x de M, position à l'instant t de la particule qui à l'instant t' se trouve en x' :

$$x = f(x', t', t).$$

Si maintenant on fixe le couple (t', t). Supposons que f soit différentiable en x' alors on peut associer à f une application linéaire tangente F entre les voisinages de x' et x dans $\mathbb{R}^3$. Cette application, appelée "transport par convection", dépend du couple (t', t) et vérifie de nombreuses propriétés (issue des propriétés de f) qui s'écrivent, au sens matriciel :

$$F(t'', t) = F(t', t)F(t'', t'), \quad F(t,t) = Id, \quad F(t', t)F(t, t') = Id.$$

Cette dernière relation montre que si $G(t', t)$ désigne l'inverse de $F(t', t)$ alors on a $G(t', t) = F(t, t')$. Avec cet outil, il est naturel d'introduire la notion de dérivée convective suivante

$$\frac{DX}{Dt} = \lim_{s\to 0} \frac{G(t, t+s)X(t+s) - X(t)}{s}.$$

Afin d'évaluer cette quantité, on effectue d'abord un développement limité de la i-ième composante du produit $G(t, t+s)X(t+s)$. En dérivant la relation $G(t,\tau)F(t,\tau) = Id$ par rapport à τ, puis en l'évaluant au point (t,t), on déduit tout d'abord

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}(t,t) = -\frac{\partial F}{\partial \tau}(t,t).$$

Or, il est clair que l'on peut écrire les composantes du vecteur vitesse v directement à l'aide de la fonction f : $v_i(x,t) = \frac{\partial f_i}{\partial \tau}(t,t)$. Par suite,

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_j}(x,t) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial \tau}(x,t,t) = \frac{\partial F_{i,j}}{\partial \tau}(x,t,t),$$

ce qui fournit l'expression suivante $\frac{\partial G}{\partial \tau}(t,t) = -\nabla v(t)$. On a ainsi les développements limités suivants au voisinage du point t :

$$X_k(t+s) = X_k(t) + s\frac{d\,X_k(t)}{dt} + ...$$
$$G_{ik}(t,t+s) = \delta_{ik} - s(\nabla v)_{ik}(t) + ...$$

d'où finalement

$$\frac{D\,X}{Dt} = \frac{d\,X}{dt} - \nabla v.X.$$

Remarque II.1.3
Le même raisonnement s'applique à un tenseur du second ordre σ :

$$\frac{D\,\sigma_{i,j}}{Dt} = \frac{D\,(\sigma_i)_j}{Dt} = \left(\frac{D\,(\sigma_i)}{Dt}\right)_j - (\nabla v)_{j,k}(\sigma_i)_k, \quad \text{avec} \quad \frac{D\,(\sigma_i)}{Dt} = \frac{d\,\sigma_i}{dt} - (\nabla v)_{i,k}\sigma_k,$$

ce qui donne

$$\frac{D\,\sigma}{Dt} = \frac{d\,\sigma}{dt} - \nabla v.\sigma - \sigma.^t(\nabla v).$$

1.0.2 La dérivée en rotation propre

Une autre manière d'introduire une dérivation par rapport au temps liée à la déformation du milieu consiste à remplacer le transport par convection F par un transport par rotation. Dans ce cas, les expressions pour la dérivée en rotation d'un vecteur et d'un tenseur s'écrivent (voir [36] pour plus de détails)

$$\frac{D\,X}{Dt} = \frac{d\,X}{dt} - W(v).X.$$

$$\frac{D\,\sigma}{Dt} = \frac{d\,\sigma}{dt} - W(v).\sigma + \sigma.W(v).$$

1.0.3 Autres modèles de dérivées objectives

D'autres modèles de dérivées objectives pour un tenseur peuvent être construits. Les plus connus, décrits par exemple par D.D. Joseph dans [49], sont les suivants :

$$\frac{D_1 M}{Dt} = \frac{d\,M}{dt} - \nabla u.M - M.^t(\nabla u), \quad \text{dérivée convectée supérieure,}$$

$$\frac{D_{-1} M}{Dt} = \frac{d\,M}{dt} +^t (\nabla u).M + M.\nabla u, \quad \text{dérivée convectée inférieure,}$$

$$\frac{D_0 M}{Dt} = \frac{d\,M}{dt} - W(u).M + M.W(u), \quad \text{dérivée de Jaumann,}$$

$$\frac{D\,M}{Dt} = \frac{d\,M}{dt} - W(u).M + M.W(u) - a(D(u).M + M.D(u)), \quad a \in [0;1]$$

C'est cette dernière définition que l'on prend par la suite. En fait, elle contient toutes les précédentes selon les valeurs de $a \in \{1;-1;0\}$. On peut dès à présent noter que ainsi définie, la "dérivée" d'un tenseur symétrique reste symétrique. On verra aussi que le cas $a = 0$, qui correspond à la dérivée de Jaumann, est quelques fois utilisé et permet de simplifier le modèle (par exemple dans [58]).

Extension des modèles de types différentiels

Le modèle d'Oldroyd ainsi que celui de Maxwell peuvent aussi être dérivés à partir d'un modèle moléculaire considérant un ensemble de dumbells (modèle avec haltères) hookéennes en suspension dans un solvant newtonien (voir par exemple [51, 61, 70]). En suivant cette démarche, on verrait que l'on ne peut pas attendre du modèle que l'on propose qu'il restitue beaucoup de caractéristiques de fluides rhéologiques existant dans la réalité. En particulier le modèle d'Oldroyd possède une viscosité de cisaillement constante ([78], p. 125). Ceci induit une viscosité élongationnelle qui devient infinie pour un taux d'élongation fini ([78], p. 127). Une forme plus sophistiquée de la loi donnant la force de liaison due aux ressorts correspond au modèle avec haltères dit de FENE (pour Finitely Extensible Non linear Elastic, voir [52]), lui-même pouvant conduire à d'autres modèles comme FENE-P et FENE-CR qui possèdent des viscosités élongationnelles bornées. Par exemple, dans le cas du modèle FENE-P, la viscosité de cisaillement est une fonction monotone décroissante du taux de cisaillement.

Signalons qu'il est possible d'étendre plus simplement les modèles d'Oldroyd ou de Maxwell. En effet, de nombreux travaux consistent à étendre le modèle d'Oldroyd en lui ajoutant des termes. Plus précisément, le modèle de Giesekus [37] s'écrit (à comparer à (II.1.1)) :

$$\frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\gamma\sigma^2}{\eta} = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v).$$

où γ est un paramètre constant. Pour la valeur $1/2$, ce modèle est plus connu sous le nom de modèle de Leonov. Le modèle de Phan-Thien et Tanner [72] est donné par

$$\frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} + \sigma Tr\sigma = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v).$$

Le modèle que l'on va étudier comporte un seul temps de relaxation (noté λ). Des modèles plus réalistes possédant plusieurs temps de relaxation peuvent être obtenus facilement en considérant par exemple

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad \frac{D\,\sigma_i}{Dt} + \frac{\sigma_i}{\lambda_i} = \frac{2\eta r_i}{\lambda_i} D(v).$$

Enfin, A.W. El-Kareh et L.G. Leal ont dérivé un terme additionnel diffusif en contrainte en analysant un modèle microscopique avec haltères [29] :

$$\frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} - \varepsilon\Delta\sigma = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v). \tag{II.1.2}$$

Ce modèle a l'avantage de posséder beaucoup plus de souplesse du point de vue théorique et c'est celui-ci qui sera étudié dans une première approche.

2 Modèle diphasique visco-élastique

Revenons à notre problème qui est de modéliser un mélange de deux fluides (newtonien ou visco-élastique). On vient de voir (au travers de l'équation (II.1.1)) que pour chaque phase on dispose d'une loi constitutive faisant intervenir les paramètres λ_i, r_i et η_i (respectivement le temps de relaxation, le paramètre de retard et la viscosité de la phase i). Après de nombreuses discussion avec Annie Colin [24], il parait raisonnable de supposer que le mélange admet lui aussi une loi constitutive du même type :

$$\tau = 2\eta(1-r)D(v) + \sigma, \quad \frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{2\eta r}{\lambda} D(v), \tag{II.2.1}$$

où les paramètres introduits pour moyenner ceux présents dans chaque phase sont définis par les relations

$$\lambda = \frac{1+\varphi}{2}\lambda_1 + \frac{1-\varphi}{2}\lambda_2, \quad r = \frac{1+\varphi}{2}r_1 + \frac{1-\varphi}{2}r_2,$$
$$\eta_1(\varphi) = \frac{1+\varphi}{2}\eta(\varphi), \quad \eta_2(\varphi) = \frac{1-\varphi}{2}\eta(\varphi).$$

Remarque II.2.1
Dans l'équation (II.2.1)*, pour ne pas alourdir les notations, on a volontairement omis la dépendance en φ de tous ses paramètres. Il va sans dire que cette dépendance est importante (voir la définition des paramètres ci-dessus). Par exemple, il est naturel de considérer que chacune de ces viscosités dépend de la composition locale du mélange, c'est-à-dire de φ. En fait, $\eta(\varphi)$ est la viscosité du mélange uniforme théorique de composition φ (voir [11, 69])*

Il est aussi important de remarquer que la loi constitutive ainsi construite pour le mélange dégénère bien dans le cas monophasique (par exemple si $\varphi = 1$ alors on retrouve exactement la loi constitutive du fluide 1). L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de traiter à la fois des mélanges visco-élastiques et des mélanges newtoniens/visco-élastiques. En effet de tels mélanges sont très courants dans les applications industrielles : mélanges polymères/solvants, injection d'un fluide dans de l'air...

3 Bilan - Système adimensionné

On est donc en mesure de présenter un modèle d'équations aux dérivées partielles pour un mélange de fluides visco-élastiques. Si on réunit les équations trouvées précédemment (I.1.1), (I.1.2), (I.2.5), (I.2.7) et (II.2.1), on en déduit un système fermé où les inconnues sont φ le paramètre d'ordre, v la vitesse moyenne du mélange, w la vitesse relative entre les deux phases, p la pression hydrostatique et σ la partie purement élastique du tenseur des contraintes. L'étape suivante va permettre à la fois de mettre en évidence les termes significatifs et à la fois d'introduire quatre grandeurs caractéristiques.

Ainsi, si on note $\overline{L}$ la taille caractéristique du domaine, $\overline{v}$ la vitesse caractéristique de l'écoulement alors on peut en déduire un temps caractéristique d'écoulement à l'échelle du domaine :

$$\overline{T} = \overline{L}/\overline{v}.$$

On verra dans les chapitres suivants que pour effectuer des simulations numériques, une fois les termes significatifs déterminés, il est naturel d'adimensionner les longueurs par $\overline{L}$. Mais ici, on souhaite voir apparaitre dans les équations précédentes, les termes significatifs issus de la présence d'une interface. Pour estimer l'ordre de grandeur de ces termes à l'échelle de l'interface, il est naturel de choisir non pas $\overline{L}$ comme taille caractéristique mais la taille caractéristique de l'interface. Des travaux dus à D. Guton [46] ont montré que l'on peut trouver cette valeur en calculant, par exemple, le profil d'une interface plane infinie dans un état d'équilibre. Dans ce cas $\varphi(x), x \in \mathbb{R}$ vérifie une équation différentiel ordinaire avec $\varphi(\pm\infty) = \pm 1$. Dans le cas du potentiel $F(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4} - \frac{\varphi^2}{2}$, la solution est explicite et l'ordre de grandeur de l'interface est donné en fonction des coefficient A et E apparaissant dans la définition de l'énergie libre de Cahn-Hilliard (I.2.2) :

$$l = \sqrt{\frac{A}{E}}.$$

Le rapport entre ses deux échelles d'espace nous défini un premier paramètre sans dimension, rapport entre la largeur de l'interface et la taille du domaine d'étude :

$$\alpha = l/\overline{L}.$$

Pour ce qui est de la densité, une grandeur caractéristique peut être donnée par une des deux densité ρ_i^0, par exemple $\overline{\rho} = \rho_1^0$. Le contraste entre les deux densités sera alors mesuré par la valeur

$$\delta = (\rho_2^0 - \rho_1^0)/\overline{\rho}.$$

Enfin, si on note $\overline{\xi}$ la grandeur caractéristique du coefficient de frottement (il est généralement connu pour les fluides classiques, par exemple pour un écoulement standard eau/polymère, sa valeur est de l'ordre de $10^{12}\ kg.m^{-3}.s^{-1}$) alors on peut définir une grandeur caractéristique pour la vitesse relative entre les deux phases et ainsi le rapport entre les deux vitesses caractéristiques

$$\beta = \frac{\overline{w}}{\overline{v}} = \frac{E}{l\overline{\xi}\overline{v}}.$$

On introduit finalement les nombres sans dimension suivants

– le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement et les forces visqueuses

$$\mathcal{R}e = \frac{\overline{\rho}\,\overline{v}l}{\overline{\eta}},$$

– le nombre capillaire qui permet de pondérer les forces capillaires mises en jeu

$$\mathcal{K} = \frac{E\overline{T}}{\overline{L}\overline{\rho}\,\overline{v}},$$

– le nombre de Peclet mesurant l'influence de la diffusion à travers l'interface

$$\mathcal{P}e = \frac{1}{\beta(1-\varepsilon)},$$

– et de façon à rendre compte du caractère élastique du mélange, on introduit le nombre de Weissenberg comme le quotient du temps de relaxation du fluide et du temps caractéristique du flot :

$$\mathcal{W}e = \mathcal{W}e(\varphi) = \frac{\lambda(\varphi)}{\overline{T}}.$$

Il peut être intéressant de remarquer que $\mathcal{K}\mathcal{R}e = El/\overline{\eta}\,\overline{v}$ a la forme d'un nombre mesurant le rapport entre les forces visqueuses ($\overline{\eta}\,\overline{v}$) et la tension de surface ($\sigma \sim El$).

Une étude précise de chaque coefficient dans le cas d'un écoulement standard (mélange eau-polymère à une température θ telle que $\theta - \theta_c \approx 1K$, voir [11, 69]) montre que certains termes peuvent être négligés. Par exemple, la vitesse relative w peut être supposée négligeable devant la vitesse moyenne v. En particulier, l'équation d'évolution en w (équation (I.2.7)) se réduit à

$$0 = -\rho_1\rho_2\nabla\left(\frac{1}{\rho(\varphi)}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi}\right) - \rho(\varphi)\xi(\varphi)w,$$

de sorte que la vitesse relative w peut s'exprimer directement à l'aide de φ. Cette vitesse est proportionnelle au gradient du potentiel chimique du mélange. Ce résultat n'est pas une surprise. En effet, dans l'équation d'évolution du paramètre d'ordre (I.1.2) on a vu que le terme faisant apparaître w correspondait à un phénomène de diffusion à travers l'interface. Il est donc naturel que ce flux soit proportionnel au gradient du potentiel chimique du mélange.

Bien que ces simplifications soient justifiées uniquement dans un cas physique particulier, on considèrera par la suite une très large gamme de paramètres et ce n'est que la concordance qualitative des résultats obtenus avec les résultats expérimentaux qui justifiera les approximations.

Finalement, le système ainsi adimensionné peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
&\rho(\varphi) = 1 - \delta\frac{1-\varphi}{2},\\
&\frac{\partial\,\varphi}{\partial t} + v.\nabla\varphi - \frac{1}{\mathcal{P}e}\,\text{div}\left(\frac{B(\varphi)}{\rho}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\right) = 0,\\
&\mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi),\\
&\rho(\frac{\partial\,v}{\partial t} + v.\nabla v) - \frac{1}{\mathcal{R}e}\,\text{div}\left(2\eta(\varphi)(1-r(\varphi))D(v)\right) + \nabla p - \text{ div }\sigma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \rho\mathbf{g} + \delta\mathcal{K}\frac{1-\varphi^2}{4}\nabla\left(\frac{\mu}{\rho}\right) + \mathcal{K}\mu.\nabla\varphi,\\
&\text{div }(v) = 0,\\
&\frac{D\,\sigma}{Dt} + \frac{\sigma}{\mathcal{W}e(\varphi)} = \frac{2\eta(\varphi)r(\varphi)}{\mathcal{W}e(\varphi)}D(v).
\end{aligned}\right. \tag{II.3.1}$$

où $B(\varphi) = \dfrac{(1-\varphi^2)^2}{8\xi(\varphi)}$ est appelé le coefficient de mobilité.

En se souvenant que le tenseur des contraintes est un deux-tenseur symétrique, ce système est un système de 11 équations à 11 inconnues en dimension 3, et de 7 équations à 7 inconnues en dimension 2.

L'étude qui va suivre va donc porter sur ce modèle. Soulignons tout de même que le système étudié est un couplage de trois équations déjà connues dans la littérature. En effet l'équation d'évolution du paramètre d'ordre φ est connue sous le nom d'équation de Cahn-Hilliard (sans le terme de transport). Celle d'évolution de la vitesse est un équation de type Navier-Stokes et enfin celle d'évolution sur le tenseur des contraintes est la loi constitutive d'Oldroyd. Quant aux couplages, celui entre l'équation de Cahn-Hilliard et l'équation de Navier-Stokes (sans terme d'extra-contrainte div σ) a été étudié par Franck Boyer dans sa thèse [11], ce couplage correspond en fait au mélange de deux fluides newtoniens. Le couplage entre les équations de Navier-Stokes et d'Oldroyd a déjà fait l'objet de nombreux travaux de recherches [32, 44, 45, 50, 55, 58, 74, 78]...

Deuxième partie

Résultats mathématiques

Introduction

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à l'étude théorique du modèle (II.3.1) élaboré dans les deux premiers chapitres. La plupart des résultats des chapitres 3 et 4 sont exposés respectivement dans [22] et [23].

Dans certaines expériences, des physiciens ont mis en évidence l'existence d'un terme diffusif au sein de l'équation décrivant l'évolution de la contrainte (voir [29]). Comme le montre l'équation (II.1.2), ceci se traduit par un terme additif au sein de la loi constitutive. Du point de vue mathématique, il est certain qu'un tel terme simplifie la résolution et c'est pour cette raison que les premiers résultats obtenus l'on été avec ce terme additif. On verra d'ailleurs au cours des démonstrations l'importance de ce dernier.

Pour l'étude mathématique, on suppose que le mélange est incompressible, cela signifie que la densité des deux liquides est la même. Il serait bien sûr intéressant d'obtenir des résultats similaires dans un cadre plus général. Dans [10], des résultats d'existence sont montrés dans le cas newtonien et faiblement non homogène (c'est à dire lorsque les deux densités sont proches).

• **Le coup de pouce de la diffusion :**

Les résultats d'existence avec le terme diffusif de la contrainte sont au nombre de trois : du cas le plus général où l'on prouve l'existence locale (en temps) d'une solution dans une certaine classe de fonctions, au cas plus particulier (celui du coefficient rhéologique $a = 0$ en dimension $d = 2$) où l'on obtient une existence globale de solution forte.

Bien sûr, tous ces résultats sont limités par ceux issus de l'équation de Navier-Stokes. Il apparaît même des difficultés supplémentaires dues aux non linéarités empêchant d'obtenir des solutions fortes globales en dimension 2 dans le cadre général $a \neq 0$ (des problèmes similaires sont décrits dans [44]). Dans certaines situations, des résultats d'unicité ont été prouvés et complètent ainsi ces théorèmes d'existence.

Les démonstrations du chapitre 3 sont basées sur des méthodes de type Fadeo-Galerkin [56]. Ce sont généralement des extensions des preuves faites par F. Boyer [8] au cas visco-élastique. La difficulté supplémentaire résidant dans le fait que l'équation constitutive inhérente aux problèmes visco-élastiques est fortement non linéaire.

• **Et sans la diffusion :**

Au vue des nombreux travaux réalisés récemment dans le domaine des fluides non newtoniens [26, 32, 44, 49, 50, 55, 58, 77], il apparaît néanmoins important de traiter le cas sans diffusion de contrainte (cas $\varepsilon = 0$). On s'apercoit très rapidement de deux choses : la première est que les estimations obtenues précédemment lorsque le coefficient rhéologique, noté a, est nul sont encore valables dans le cas $\varepsilon = 0$. La seconde est que, au contraire, lorsque ce coefficient est non nul, la méthode générale ayant permis de prouver les théorèmes dans le cas $\varepsilon > 0$ ne donne plus de résultats intéressants. Il va donc falloir mettre en place une autre stratégie.

Contrairement aux premières preuves qui utilisaient comme approche celle de F. Boyer [8] pour prouver l'existence dans les cas diphasiques newtoniens, on va plutôt essayer de reprendre les idées développées communément pour démontrer des théorèmes d'existence dans les cas monophasiques visco-élastiques. La méthode, qui est basée sur un théorème de point fixe dans un espace adequat, va être adaptée au cas diphasique. La difficulté essentielle est que cette méthode demande beaucoup de régularité en vitesse et va donc nous obliger à obtenir beaucoup de régularité sur le paramètre d'ordre. On obtient ainsi un résultat d'existence (et d'unicité) locale de solution forte.

Suite à ces résultats d'existence local, un résultat global en temps donnerait un sens plus "physique" aux solutions obtenues. On montre ensuite un tel résultat en supposant les données initiales petites. Un point fixe mettant en avant les complémentarité des termes linéaires couplés permet d'avoir une existence pour tout temps lorsque initiallement la vitesse et la contrainte sont petits et lorsque la composition du mélange est proche d'un état métastable.

• **Lorsque la diffusion s'évanouit :**
Le chapitre 5 a pour but l'étude du comportement des solutions du chapitre 3 (cas $\varepsilon > 0$) lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro ($\varepsilon \to 0$). Même si on ne sait pas actuellement quantifier le coefficient de diffusion, on montre que lorsqu'il est assez petit la solution se comporte comme lorsqu'il est nul à l'exeption des zones proches du bord du domaine (à une distance inférieure à $\sqrt{\varepsilon}$ du bord) où elle varie fortement afin de vérifier les conditions aux limites de type Neumann imposées sur la contrainte.

Chapitre 3

Présence d'un terme diffusif en contrainte

Comme annoncé dans l'introduction de cette partie, ce chapitre est dédié au cas où le terme diffusif est présent dans la loi constitutive d'Oldroyd. Néanmoins, étant donné que ce chapitre coïncide avec les premiers résultats mathématiques de cette thèse, les notations introduites ici seront valables tout au long de ces trois chapitres. De même, on présente des résultats classiques (lemmes préliminaires) qui seront utilisés aussi bien dans ce chapitre que dans les chapitres 4 et 5.

Plus exactement, au cours de ce chapitre, on commence par présenter les hypothèses (mobilité non dégénérée, potentiel "presque polynomial" ...), on définit ensuite le contexte mathématique puis on expose le résultat principal : l'existence locale et l'unicité d'une solution forte. Deux cas assez différents apparaissent selon la dérivée covariante choisie dans le modèle de Jeffreys. Une fois rappelé quelques résultats préliminaires sur le paramètre d'ordre (dont la moyenne est conservée le long du temps), sur l'algèbre tensoriel, sur le terme classique du transport dans l'équation de Navier-Stokes et sur divers résultats de compacité, la partie principale du chapitre est consacrée à la preuve des résultats d'existence. Les deux dernières parties expliquent respectivement la preuve de l'unicité et la preuve du cas de la dérivée covariante corotationnelle.

1 Hypothèses et principaux résultats

On considère donc des écoulements de deux fluides visco-élastiques de même densité. En utilisant la loi constitutive d'A.W. El-Kareh et L.G. Leal pour la contrainte ([29], voir aussi l'équation (II.1.2)), le modèle (II.3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + v\cdot\nabla\varphi - \text{ div } (B(\varphi)\nabla\mu) = 0, \quad \mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi), \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v - 2\,\text{div } (\eta(\varphi)D(v)) + \nabla p - \text{ div } \sigma = -\alpha^2\Delta\varphi\nabla\varphi, \\[2ex] \text{div } v = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + v\cdot\nabla\sigma + g_a(\sigma,v) + l(\varphi)\sigma - \varepsilon\Delta\sigma = \nu(\varphi)D(v), \\[2ex] \varphi(0) = \varphi_0, \quad v(0) = v_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \\[2ex] \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial\mu}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad v|_\Gamma = h \quad \text{avec } h.n = 0. \end{cases} \tag{III.1.1}$$

où l'application g_a ($a \in [-1;1]$) est définie comme une application bilinéaire à valeurs dans l'ensemble des 2-tenseurs :

$$\begin{array}{rccc} g_a : & \{\text{2-tenseur}\} \times \{\text{1-tenseur}\} & \longrightarrow & \{\text{2-tenseur}\} \\ & (\ \sigma\ ,\ v\ ) & \longmapsto & -W(v).\sigma + \sigma.W(v) + a(D(v).\sigma + \sigma.D(v)). \end{array}$$

Remarque III.1.1

- *Signalons d'un part que pour simplifier les notations, nous avons noté η la viscosité de l'équation de Navier-Stokes alors qu'elle valait $(1-r)\eta$ dans le modèle* (II.3.1). *Etant donné que l'on ne considère que les cas où $0 \leq r < 1$, cette viscosité restera positive. De même, on a noté ν la grandeur positive $2\eta r/\mathcal{W}e$ du système* (II.3.1).
- *D'autre part, le coefficient ε introduit ici devrait, en toute rigueur, dépendre de la composition du mélange, par exemple de façon linéaire :*

$$\varepsilon = \frac{1+\varphi}{2}\varepsilon_1 + \frac{1-\varphi}{2}\varepsilon_2,$$

ε_1 et ε_2 étant les deux coefficients additifs strictement positifs de chaque constituant du mélange. Pour simplifier (mais celà ne change en rien les résultats obtenus) on suppose que ε ne dépend pas de φ et que tout au cours de ce chapitre $\varepsilon > 0$.

1.1 Hypothèses

On suppose que les fonctions B, η, l, ν et F sont assez régulières (de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornées avec des dérivées bornées par exemple). Bien que l'équation de Cahn-Hilliard ait été intensivement étudiée, il existe peu de résultats mathématiques dans lesquels la mobilité diffusive B dépend de φ. Cette mobilité vue comme fonction de la concentration, est apparue dans la dérivation originale de l'équation de Cahn-Hilliard (voir [17]). On suppose ici que la mobilité est non dégénérée :

$$\exists\, B_1, B_2 > 0\ , \quad B_1 \leq B \leq B_2. \tag{III.1.2}$$

L'étude mathématique du cas dégénéré de l'équation Cahn-Hilliard est racontée dans [30]. Il est essentiel de pouvoir le faire dans le cas dégénéré puisque physiquement, la mobilité s'annule lorsque φ vaut ± 1 (en général, la mobilité qui est choisie est du type $B(\varphi) = (1-\varphi^2)^r$, $r \geq 0$, voir par exemple (II.3.1)). Bien que l'étude du cas dégénéré soit plus difficile, F. Boyer [11] a montré que dans le cas newtonien, certains résultats d'existence (plus faibles) étaient aussi valables.

En outre, on suppose que la viscosité η, l'élasticité l et la fonction mesurant le retard du mélange ν restent strictement positives et bornées en ce sens qu'elles satisfont, par exemple pour la viscosité :

$$\exists\, \eta_1, \eta_2 > 0\ , \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2. \tag{III.1.3}$$

Il reste à faire des hypothèses sur le potentiel de Cahn-Hilliard F. Un potentiel physique est toujours borné inférieurement et par ailleurs, l'addition d'une constante au potentiel ne change pas les équations. On peut donc supposer que

$$F \geq 0. \tag{III.1.4}$$

On peut facilement voir que la convexité du potentiel Cahn-Hilliard a un effet important sur le comportement de l'interface : si F est non convexe, le mélange est instable (la diffusion est négative dans l'équation Cahn-Hilliard) et les liquides sont seulement partiellement miscibles. Des potentiels habituels, comme les potentiels décrits auparavant peuvent contenir des régions à la fois stables et instables (voir (I.2.3) et (I.2.4) ainsi que la figure (I.2.1)). Dans la perspective de manipuler de tels cas, on ne supposera pas la convexité du potentiel mais seulement

$$\exists F_5 \geq 0 \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad F''(x) \geq -F_5. \tag{III.1.5}$$

Pour obtenir l'existence de solutions, on ajoutera des hypothèses plus générales sur la croissance du potentiel dans le voisinage des points $\varphi = 1$ et $\varphi = -1$.

$$\exists\, F_1, F_2 > 0 \quad / \quad |F'''(x)| \leq F_1|x|^q + F_2 \quad \text{où} \quad 1 \leq q < +\infty. \tag{III.1.6}$$

Afin d'obtenir des solutions globales, on aura besoin de l'hypothèse supplémentaire

$$1 \leq q \leq 3 \text{ si } d = 3 \text{ et } 1 \leq q < +\infty \text{ si } d = 2. \tag{III.1.7}$$

Il est clair que n'importe quelle fonction polynomiale (de petit degré en dimension trois, voir par exemple (I.2.3)) avec un coefficient dominant positif satisfait de telles hypothèses. L'équation de Cahn-Hilliard est d'habitude étudiée avec de telles non linéarités. Finalement, la dernière hypothèse est une généralisation de la convexité :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad \exists F_3(\gamma) > 0 \quad \exists F_4(\gamma) > 0 \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x-\gamma)F'(x) \geq F_3(\gamma)F(x) - F_4(\gamma). \tag{III.1.8}$$

Cette hypothèse est satisfaite par exemple par n'importe quelle fonction convexe en utilisant $F_3(\gamma) = 1$ et $F_4(\gamma) = F(\gamma)$. Cependant, sous la température critique les potentiels de Cahn-Hilliard considérés ont typiquement une structure en double-puits et ne sont évidemment pas convexes. Ils vérifient néanmoins cette propriété.

Remarque III.1.2
Comme pour ce qui concerne la mobilité, dans certains cas physiques, le potentiel est singulier de type logarithmique [5, 11] et défini que sur $]-1;1[$. *Là aussi, des résultats d'existence sont connus pour des fluides newtoniens et s'obtiennent en approchant le potentiel logarithmique par des potentiels plus réguliers, puis en passant à la limite. Dans les deux cas (potentiel singulier ou mobilité dégénérée), on peut vérifier que la solution* φ *obtenue vérifie*

$$|\varphi(t,x)| \leq 1 \quad \textit{pour presque tout } (t,x).$$

1.2 Notations et espaces fonctionels

Dans tout ce qui concerne la partie mathématique de cette thèse, la même lettre C symbolise une constante qui peut être différente chaque fois qu'elle apparaît.

Soit Ω un domaine borné lisse dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3. On note Γ son bord et n le vecteur normal unitaire sortant.

On utilise les espaces suivants : les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ (ou simplement L^p), $1 \leq p \leq \infty$, munis des normes habituelles $|\cdot|_p$ (pour $p = 2$ son produit scalaire sera noté $(\cdot,\cdot)$) ; les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ (ou simplement H^s), $s \in \mathbb{R}$, avec leurs normes $\|\cdot\|_s$ et de produits scalaires $((\cdot,\cdot))_s$. Pour simplifier on notera aussi L^p et H^s les espaces vectoriels $(L^p)^d$, $(H^s)^d$, $(L^p)^{d\times d}$, $(H^s)^{d\times d}$... leurs normes étant notées de la même manière que celle du cas monodimensionnel.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et X un espace Banach, on utilisera aussi l'espace de fonction $L^p(I;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, qui consiste en l'ensemble des fonctions p-intégrables à valeurs dans X.

Présentons maintenant les espaces naturellement liés avec le problème :

$$\Phi = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad / \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial \Delta\phi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \Phi_s = \overline{\Phi}^{H^s} \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_s,$$

$$\mathcal{V} = \{ w \in \mathcal{D}(\Omega)^d \quad / \quad \text{div}\, w = 0 \} \quad \text{et} \quad V_s = \overline{\mathcal{V}}^{H^s} \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_s \text{ (pour } s \leq 2\text{)},$$

$$\Sigma = \left\{ \tau \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^{d\times d} \quad / \quad \left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \Sigma_s = \overline{\Sigma}^{H^s} \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_s.$$

Ces espaces étant bien définis pour des réels $s \geq 0$, pour $s' < 0$, on utilise aussi les notations $\Phi_{s'}$, $V_{s'}$ et $\Sigma_{s'}$ en tant qu'espaces duals de $\Phi_{-s'}$, $V_{-s'}$ et $\Sigma_{-s'}$ respectivement. Finalement, on note A l'opérateur de Stokes : $Au = -\Delta u + \nabla\pi$ ($\pi \in V_0$).

Une fois ces notations précisées, on peut introduire la dernière hypothèse qui nous sera utile : c'est une hypothèse de régularité sur la fonction imposant la vitesse au bord du domaine h. Elle doit naturellement être tangente au bord (condition de glissement) et suffisamment régulière :

$$h \in H^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad s = (d+1)/2 \quad \text{et} \quad h.n = 0. \tag{III.1.9}$$

Dans le cas tridimensionnel, on ajoute une hypothèse correspondant, par exemple, au cas physique d'écoulement dans un canal où les vitesses sur chaque bord sont imposées et constantes, voir la remarque III.3.1.

1.3 Enoncé des résultats

Cette dernière hypothèse (III.1.9), permet de prolonger h en un champ de vecteurs, que l'on notera encore h, défini sur Ω et vérifiant

$$h \in H^2(\Omega), \quad \operatorname{div} h = 0 \quad \text{sur} \ \Omega \quad \text{et} \quad h.n = 0 \quad \text{sur} \ \Gamma.$$

La preuve de ce relèvement de la condition au bord est classique. Elle est exposée dans [53]. A l'aide de ce résultats, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème III.1.1 (Le cas général)
Supposons (III.1.2), (III.1.3), (III.1.4), (III.1.5), (III.1.6) , (III.1.8) *et* (III.1.9). *Si* $\varphi_0 \in \Phi_2$, $v_0 \in h + V_1$ *et* $\sigma_0 \in \Sigma_1$ *alors il existe* $T^* > 0$ *et une unique solution* (φ, v, σ) *de* (III.1.1) *sur* $[0, T^*[$ *telle que*

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^2(0,T^*;\Phi_4) \cap L^\infty(0,T^*;\Phi_2),\\
&v - h \in L^2(0,T^*;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T^*;V_1),\\
&\sigma \in L^2(0,T^*;\Sigma_2) \cap L^\infty(0,T^*;\Sigma_1).
\end{aligned}$$

Théorème III.1.2 (Le cas $a = 0$)
Si on suppose en plus (III.1.7), *et si* $a = 0$ *dans* (III.1.1), $\varphi_0 \in \Phi_1$, $v_0 \in h + V_0$ *et* $\sigma_0 \in \Sigma_0$ *alors il existe une solution globale* (φ, v, σ) *de* (III.1.1) *telle que*

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^2_{loc}(0,+\infty;\Phi_3) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;\Phi_1),\\
&v - h \in L^2_{loc}(0,+\infty;V_1) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;V_0),\\
&\sigma \in L^2_{loc}(0,+\infty;\Sigma_1) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;\Sigma_0).
\end{aligned}$$

Corollaire III.1.1 (Le cas $a = 0$ en dimension 2)
Dans le cas où $d = 2$ *et avec les hypothèses du premier théorème III.1.1, si* $a = 0$ *dans* (III.1.1), $\varphi_0 \in \Phi_2$, $v_0 \in h + V_1$ *et* $\sigma_0 \in \Sigma_1$ *alors il existe une unique solution solution globale* (φ, v, σ) *de* (III.1.1) *telle que*

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^2_{loc}(0,+\infty;\Phi_4) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;\Phi_2),\\
&v - h \in L^2_{loc}(0,+\infty;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;V_1),\\
&\sigma \in L^2_{loc}(0,+\infty;\Sigma_2) \cap L^\infty_{loc}(0,+\infty;\Sigma_1).
\end{aligned}$$

Remarque III.1.3
– *Dans le second théorème, on peut supposer que* F *est seulement de classe* $\mathcal{C}^2$ *(voir l'hypothèse* (III.1.4)*).*

– *Dans la littérature, la valeur $a = 0$ correspond à la dérivée corotationnelle convectée (les valeurs $a = 1$ et $a = -1$ correspondant respectivement aux dérivées convectées supérieure et inférieure).*
– *Dans le cas général, on montre l'existence et le résultat d'unicité pour une solution locale. Dans le cas $a = 0$, on obtient une solution globale faible (forte en dimension 2) pour une condition initiale générale.*

2 Quelques résultats préliminaires

2.1 Analyse tensorielle

Pour obtenir des bornes d'énergie, on rappelle ici quelques résultats concernant l'analyse tensorielle et on prouve un résultat général d'intégration par parties sur les tenseurs. La fin de ce paragraphe est consacrée à la preuve de deux égalités sur l'application g_a qui nous seront utiles par la suite.

Définition III.2.1
Le produit contracté d'ordre s d'un p-tenseur A et d'un q-tenseur B (pour $s \leq min\{p,q\}$) est le $(p+q-2s)$-tenseur défini par :

$$A_p \overset{(s)}{:} B_q = \left(\sum_{k_1,\dots,k_s} a_{i_1,\dots,i_{p-s},k_1,\dots,k_s} b_{k_1,\dots,k_s,j_{s+1},\dots,j_q} \right)_{i_1,\dots,i_{p-s},j_{s+1},\dots,j_q}.$$

Remarque III.2.1
– *On dira qu'un p-tenseur $M = (m_{i_1,\dots,i_p})_{i_1,\dots,i_p}$ est symétrique si $m_{i_1,\dots,i_p} = m_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_p)}$ pour tout élément σ du groupe symétrique S_p (ainsi, un 2-tenseur est symétrique lorsque sa matrice associée l'est au sens classique).*
– *Pour plus de simplifications, on notera $A \overset{(0)}{:} B = AB$, $A \overset{(1)}{:} B = A \cdot B$ et $A \overset{(2)}{:} B = A : B$.*
– *L'opérateur ∇ représente le 1-tenseur $(\partial_k)_k$ et on a $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, $\operatorname{div} M = \nabla . M$.*
– *Le produit $\overset{(p)}{:}$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'ensemble des p-tenseurs (par exemple, si A et B sont deux matrices alors on a $A : B = B : A$).*
– *Avec ces notations, lorsque A et B sont deux p-tenseurs, on peut définir directement le produit scalaire dans L^2 par $(A,B) = \int_\Omega A \overset{(p)}{:} B$.*

Proposition III.2.1
Pour $1 \leq s \leq min\{p, q+1\}$, soit A_p un p-tenseur de classe $\mathcal{C}^\infty$ et B_q un q-tenseur de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si A_p est symétrique (ou si $p = s$) alors :

$$\int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\nabla B_q) = -\int_\Omega (\nabla \cdot A_p) \overset{(s-1)}{:} B_q + \int_\Gamma (n \cdot A_p) \overset{(s-1)}{:} B_q.$$

Preuve : Dans un premier temps, on utilise la définition du produit ∇B_q d'ordre 0 et, dans un second temps du produit d'ordre s par A_p :

$$\begin{aligned}\int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\nabla B_q) &= \int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\partial_{j_0} b_{j_1,\dots,j_q})_{j_0,\dots,j_q}, \\ &= \int_\Omega \sum_{k_1,\dots,k_s} a_{i_1,\dots,i_{p-s},k_1,\dots,k_s} (\partial_{k_1} b_{k_2,\dots,k_s,j_s,\dots,j_q}).\end{aligned}$$

Après une classique intégration par parties sur chaque terme de la somme, on utilise la symétrie (ou le fait que $p = s$) pour obtenir :

$$\int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\nabla B_q) = \sum_{k_1,\ldots,k_s} - \int_\Omega \partial_{k_1} a_{k_1,i_1,\ldots,i_{p-s},k_2,\ldots,k_s} b_{k_2,\ldots,k_s,j_s,\ldots,j_q}$$
$$+ \sum_{k_1,\ldots,k_s} \int_\Gamma a_{k_1,i_1,\ldots,i_{p-s},k_2,\ldots,k_s} b_{k_2,\ldots,k_s,j_s,\ldots,j_q} n_{k_1},$$
$$\int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\nabla B_q) = - \int_\Omega \sum_{k_2,\ldots,k_s} \left(\sum_{k_1} \partial_{k_1} a_{k_1,i_1,\ldots,i_{p-s},k_2,\ldots,k_s} \right) b_{k_2,\ldots,k_s,j_s,\ldots,j_q}$$
$$+ \int_\Gamma \sum_{k_2,\ldots,k_s} \left(\sum_{k_1} n_{k_1} a_{k_1,i_1,\ldots,i_{p-s},k_2,\ldots,k_s} \right) b_{k_2,\ldots,k_s,j_s,\ldots,j_q},$$
$$\int_\Omega A_p \overset{(s)}{:} (\nabla B_q) = - \int_\Omega (\nabla \cdot A_p) \overset{(s-1)}{:} B_q + \int_\Gamma (n \cdot A_p) \overset{(s-1)}{:} B_q.$$

■

Exemple 2.1
Dans la pratique, on utilisera fréquemment les cas suivants :

- $p = 1$, $q = 0$, $s = 1$ *et avec les notations usuelles (*u *est un vecteur (*1*-tenseur) et* f *un scalaire (*0*-tenseur)) :*
$$\int_\Omega u.(\nabla f) = - \int_\Omega (\text{ div } u) f + \int_\Gamma f(u.n).$$
- $p = 2$, $q = 1$, $s = 2$ *et si* σ *est un* 2*-tenseur symétrique :*
$$\int_\Omega \sigma : (\nabla u) = - \int_\Omega (\text{ div } \sigma).u + \int_\Gamma u.(\sigma.n).$$
- $p = 3$, $q = 2$, $s = 3$ *et si, de plus,* τ *est un* 3*-tenseur symétrique :*
$$\int_\Omega \tau \overset{(3)}{:} (\nabla \sigma) = - \int_\Omega (\text{ div } \tau) : \sigma + \int_\Gamma \sigma : (\tau.n).$$

Remarque III.2.2
Dans le dernier exemple, on peut prendre $\tau = \nabla\sigma$ *bien que ce dernier ne soit pas symétrique ! Dans ce cas particulier, on utilise le résultat pour* $p = s = 3$*, on obtient :*

$$\int_\Omega (\nabla\sigma) \overset{(3)}{:} (\nabla\sigma) = - \int_\Omega (\Delta\sigma) : \sigma + \int_\Gamma ((n \cdot \nabla)\sigma) : \sigma. \tag{III.2.1}$$

Dans le cas tensoriel, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder sont encore vraies. On les montre en appliquant les inégalités classiques sur chaque composante puis en utilisant la convexité de l'application $x \mapsto x^k$, $k \geq 1$, c'est à dire $(x + y)^k \leq 2^{k-1}(x^k + y^k)$. On a donc :

Proposition III.2.2
Si A *et* B *sont deux* p*-tenseurs alors il existe une constante* C *telle que*

$$|(A, B)| \leq C|A|_r |B|_s \quad \text{, pour} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Proposition III.2.3
Si A est un p-tenseur et B un q-tenseur alors il existe une constante C telle que

$$|A.B|_t \leq C|A|_r|B|_s \quad , \text{pour} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}.$$

Rappelons que, pour deux p-tenseurs A et B, on a par définition $(A, B) = \int_\Omega A \overset{(p)}{:} B$, et dans le cas $p = 2$ (cas matriciel), puisque $A : B = Tr(A.^tB)$, on obtient : $(A, B) = \int_\Omega Tr(A.^tB)$. Cette remarque nous permet d'obtenir deux égalitées intéressantes dans lesquelles on voit clairement le rôle particulier du cas $a = 0$.

Lemme III.2.1
Si g_a est défini comme dans (III.1.1) *avec v et σ de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors on a les deux égalités :*

$$(g_a, \sigma) = 2a(\sigma.\sigma, \nabla v) \quad \text{et} \quad (g_a, \Delta\sigma) = (a+1)(\nabla v.\sigma, \Delta\sigma) + (a-1)(\sigma \cdot \nabla v, \Delta\sigma).$$

Preuve : En écrivant la définition de g_a, un calcul direct nous donne le résultat (l'hypothèse de symétrie sur σ est très importante ici) :

$$\begin{aligned}
g_a &= \Big(W(v).\sigma - \sigma.W(v)\Big) + a\Big(D(v).\sigma + \sigma.D(v)\Big),\\
g_a : \sigma &= Tr\Big(W(v).\sigma.^t\sigma - \sigma.W(v).^t\sigma\Big) + aTr\Big(D(v).\sigma.^t\sigma + \sigma.D(v).^t\sigma\Big),\\
g_a : \sigma &= 2aTr(D(v).\sigma.\sigma) = aTr(\nabla v.\sigma.\sigma + \nabla^t v.\sigma.\sigma) = 2aTr(\sigma.\sigma \cdot \nabla^t v),\\
\int_\Omega g_a : \sigma &= 2a\int_\Omega Tr(\sigma.\sigma \cdot \nabla^t v).
\end{aligned}$$

La preuve de la deuxième égalité est très semblable : on emploie le fait que $\Delta\sigma$ est, tout comme σ, symétrique. ■

2.2 Résultats concernant les termes de transport

Définition III.2.2
Soit u un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ à divergence nulle. On définit, pour σ et τ deux p-tenseurs :

$$\underline{b}(u, \sigma, \tau) = \int_\Omega (u \cdot \nabla\sigma) \overset{(p)}{:} \tau.$$

Remarque III.2.3
- *Pour deux vecteurs v et w, on retrouve la définition classique (introduite par exemple dans [25]) :*

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j} \int_\Omega u_i(\partial_i v_j)w_j.$$

- *Plus généralement on a :* $\underline{b}(u, \sigma, \tau) = \displaystyle\sum_{k_1,\ldots,k_p} b(u, \sigma_{k_1,\ldots,k_p}, \tau_{k_1,\ldots,k_p})$.

La forme trilinéaire b, tout comme $\underline{b}$, a de nombreuses propriétés de continuité (voir [25], [83]). Par la suite, on utilisera surtout les suivantes :

Lemme III.2.2
- *Si $u \in V_1$, $\sigma \in H^1$ et $\tau \in H^1$ alors $\underline{b}(u, \sigma, \tau) = -\underline{b}(u, \tau, \sigma)$, en particulier*

$$\underline{b}(u, \tau, \tau) = 0.$$

- *Si $u \in H^1$, $v \in H^1$ et $w \in V_{d/2}$ alors $|b(u, v, w)| \leq C|u|_2^{1/2}\|u\|_1^{1/2}|v|_2^{1/2}\|v\|_1^{1/2}\|w\|_{d/2}$.*

2.3 Inégalités fondamentales

Tout d'abord, pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$, on définit sa moyenne par

$$m(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f.$$

Cette quantité joue un rôle important dans la théorie des équations de Cahn-Hilliard . En particulier, lorsque φ vérifie l'équation de Cahn-Hilliard (avec un champ de vitesse régulier pour le transport) et les conditions au bord de type Neumann, sa moyenne est conservée au cours du temps. De plus, on a le lemme suivant, prouvé dans [84] :

Lemme III.2.3
Pour tout $\phi \in \Phi_1$ on a

$$\|\phi - m(\phi)\|_1 \leq C|\nabla\phi|_2,$$

et pour tout $\phi \in \Phi_{s+2}$, $s \geq 0$ on a

$$\|\phi - m(\phi)\|_{s+2} \leq C\|\Delta\phi\|_s.$$

A partir de ce lemme, si on utilise l'inclusion $H^{3/2} \subset L^\infty$ lorsque $d = 2$, où l'inégalité de Agmon (voir [2]) lorsque $d = 3$, et l'interpolation entre L^2 et H^3, on obtient dans tous les cas

Lemme III.2.4
Pour tout $\phi \in \Phi_4$,

$$|\nabla\phi|_\infty \leq C|\nabla\phi|_2^{1/2}|\Delta^2\phi|_2^{1/2}.$$

La méthode de Galerkin que l'on va appliquer dans les preuves est basée sur des estimations dans des espaces H^s. On emploiera les lemmes suivants qui sont des conséquences des injections de Sobolev (voir [14]) et des théorèmes d'interpolation (voir [57]) :

Lemme III.2.5
- *Si $d = 2$ et $u \in H^1$ alors $|u|_4 \leq C(|u|_2 + |u|_2^{1/2}|\nabla u|_2^{1/2})$.*
- *Si $d = 3$ et $u \in H^1$ alors $|u|_3 \leq C(|u|_2 + |u|_2^{1/2}|\nabla u|_2^{1/2})$ et $|u|_6 \leq C(|u|_2 + |\nabla u|_2)$.*

Le système étudié étant non linéaire, il est naturel d'énoncer le lemme suivant, dont une preuve se trouve dans [48] :

Lemme III.2.6
L'application $(f, g) \longrightarrow fg$ est continue de $H^{s_1} \times H^{s_2}$ dans H^s lorsque

$$s_1 + s_2 \geq 0, \quad s = \min\left\{s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_1 + s_2 - \frac{d}{2} - \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

On peut choisir $\varepsilon = 0$ dès que $s_1 \neq d/2$, $s_2 \neq d/2$ et $\min\{s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_1 + s_2 - d/2\} \neq -d/2$.

Lemme III.2.7 (inégalité de Korn, voir [47])
Pour un champ de vecteurs u donné dans H_0^1 alors $|\nabla u|_2^2 \leq 2|D(u)|_2^2$ avec égalité si l'on suppose $\operatorname{div} u = 0$.

Rappellons que l'ouvert Ω est régulier et borné dans $\mathbb{R}^d$. On peut donc y appliquer l'inégalité de Poincaré classique.

Lemme III.2.8 (inégalité de Poincaré, voir [1])
Si $u \in V_1$ alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que $\|u\|_1^2 \leq C(\Omega)|\nabla u|_2^2$.

En d'autres termes, ceci montre que l'application $u \to |\nabla u|_2$ est une norme sur V_1 qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Lemme III.2.9 (Régularité du problème de Stokes, voir [83])
Pour toute fonction $u \in V_1 \cap H^2$, *il existe un unique couple* $(Au, \pi) \in V_0 \times (H^1/\mathbb{R})$ *tel que*

$$\Delta u = -Au + \nabla \pi.$$

L'opérateur de Stokes A *est un opérateur non borné dans* V_0 *de domaine* $V_1 \cap H^2$*. De plus, il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in V_1 \cap H^2$ *on ait* $\|u\|_2 \leq C|Au|_2$, $\|\pi\|_1 \leq C|Au|_2$ *et* $|\pi|_2 \leq C\|u\|_1$.

Les résultats classiques suivants peuvent être trouvés dans [81] ; B, X et Y étant des espaces de Banach. De plus, on suppose que $X \subset B \subset Y$ avec injection compacte $X \longrightarrow Y$.

Lemme III.2.10
- *Si* F *est une partie bornée de* $L^p(0,T;X)$ *où* $1 \leq p < \infty$ *et si* $\partial_t F = \{\partial_t f ; f \in F\}$ *est une partie bornée de* $L^1(0,T;Y)$ *alors* F *est relativement compacte dans* $L^p(0,T;B)$.
- *Si* F *est une partie bornée de* $L^\infty(0,T;X)$ *et* $\partial_t F$ *une partie bornée de* $L^r(0,T;Y)$ *avec* $r > 1$ *alors* F *est relativement compacte dans* $C([0,T];B)$.
- *Si* $f \in L^2(0,T;X)$ *est telle que* $\partial_t f \in L^2(0,T;Y)$ *alors* $f \in C([0,T];[X,Y]_{1/2})$.

3 Preuves des résultats d'existence

Toutes ces preuves sont basées sur des approximations de Galerkin associées à des estimations d'énergie [56], [83]. Dans la section 3.1, on réduit le problème non homogène de Navier-Stokes pour la vitesse v à un problème homogène pour une nouvelle vitesse $u = v - h$. Dans un deuxième temps, on construit des solutions approchées du problème (III.1.1) par la méthode de Galerkin. Dans les sections 3.3 et 3.4, on donne certaines estimations pour (φ, u, σ) et leurs dérivées. Ces estimations nous permettent de passer à la limite dans les termes non linéaires en utilisant des méthodes de compacité.

3.1 Relèvement des conditions aux bords

Tout d'abord, rappelons l'hypothèse III.1.9 :

$$h \in H^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad s = (d+1)/2 \quad \text{et} \quad h.n = 0.$$

On a déjà vu (partie 1.3) que ces hypothèses permettent de relever h en un champ de vecteur sur l'ouvert Ω qui soit régulier (ici H^2) et à divergence nulle. Pour des besoins techniques, on aura en fait besoin de plus, en particulier, on demandera à ce que h soit "petit" en norme L^4. Dans le cas tri-dimensionnel, cette condition nécessite une hypothèse supplémentaire :

$$\text{div } (h \circ \Pi) = 0 \text{ au voisinage de } \Gamma. \tag{III.3.1}$$

où Π est la projection sur la frontière Γ. Cette supposition est vérifiée dans le cas d'un canal où la vitesse est constante sur chaque bord (voir la remarque III.3.1). Pour les démonstrations, on aura besoin d'une telle extension. Plus précisément on a le lemme suivant

Lemme III.3.1
Sous les hypothèses (III.1.9) *et* (III.3.1), *pour tout* $\delta > 0$, *il existe un champ de vecteurs sur* Ω *noté* h_δ *satisfaisant*

$$\begin{aligned}
&h_\delta \in H^2(\Omega), \\
&\text{div } h_\delta = 0 \textit{ sur } \Omega, \\
&h_\delta = h \textit{ sur } \Gamma, \\
&|h_\delta|_4 \leq C_1(\Omega)\delta, \qquad (*) \\
&|b(w, h_\delta, w)| \leq C_1(\Omega)\delta\|w\|_1^2, \quad \forall\, w \in V_1.
\end{aligned}$$

Ce résultat (sans la condition $(*)$) est un résultat connu pour le problème non homogène de Stokes [57], [83]. On verra au cours de la démonstration de ce lemme que la seconde hypothèse (III.3.1) n'est pas nécessaire dans le cas bidimensionel.

Remarque III.3.1
Si on considére la figure III.3.1, c'est à dire un canal $\Omega = \{-1 \le z \le 1\} \subset \mathbb{R}^d$ avec la vitesse au bord choisie telle que $v = U\ e_x$ sur le bord supérieur $\{z = 1\}$ et $v = -U\ e_x$ sur le bord inférieur $\{z = -1\}$ alors pour toute valeur de $\delta > 0$, on a une fonction explicite h_δ qui vérifie les propriétés du lemme III.3.1 (voir [63], [8]).

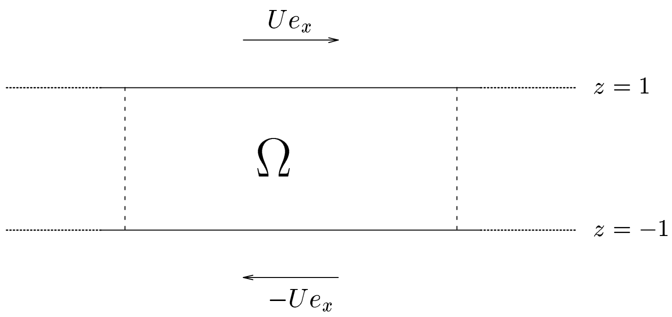


FIG. III.3.1: Conditions au bord dans le cas d'un canal

Preuve du lemme III.3.1 :

– Premièrement, puisque le bord Γ de l'ouvert Ω est régulier (en fait, l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^2$ suffit) il existe un voisinage tubulaire de Γ dans lequel la projection sur Γ est bien définie (voir par exemple [6], p.106). Soit $\mathrm{Tub}_R\Gamma$ ce voisinage tubulaire de Γ, Π la projection de $\mathrm{Tub}_R\Gamma$ sur Γ et $\rho(x)$ la distance de $x \in \mathrm{Tub}_R\Gamma$ à Γ (on a $\rho(x) = \,|x - \Pi(x)\,|$, $\forall x \in \mathrm{Tub}_R\Gamma$).

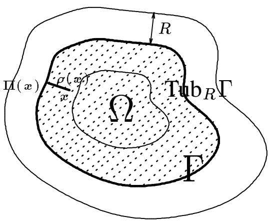


FIG. III.3.2: Le voisinage tubulaire du bord

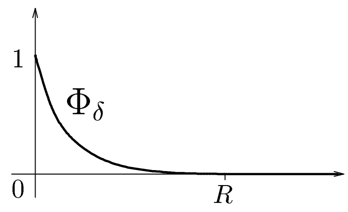


FIG. III.3.3: La fonction ϕ_δ

– D'après A. Miranville (dans le cas du canal [63]) on introduit la fonction

$$\begin{aligned}&\phi_\delta(s) = exp\big(\frac{1}{\delta^4}\big)exp\big(\frac{R}{\delta^4(s-R)}\big) \quad \text{si } s \in [0; R[,\\ &\phi_\delta(s) = 0 \quad \text{si } s \in [R; +\infty[.\end{aligned} \tag{III.3.2}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, toutes ses dérivées sont bornées et elle vérifie (voir [63])

$$\int_0^R |\phi_\delta(s)|^4 ds \le \frac{R}{4}\delta^4. \tag{III.3.3}$$

Suivant la dimension, on va procéder différemment. Dans le cas tri-dimensionnel, posons

$$h_\delta(x) = \phi_\delta(\rho(x))h(\Pi(x)).$$

Ce champ de vecteurs est bien défini sur $\overline{\Omega}$. De plus, il est clair que $h_\delta = h$ sur Γ.

– Puisque les fonctions ϕ_δ, ρ et Π sont de classe $\mathcal{C}^2$, en utilisant la régularité de h (voir l'hypothèse III.1.9), on déduit
$$h_\delta \in H^2(\Omega).$$
– D'autres parts, en utilisant la définition de h_δ, on a
$$\text{div } (h_\delta(x)) = \phi_\lambda(\rho(x)) \text{ div } (h(\Pi(x))) + \phi'_\lambda(\rho(x))h(\Pi(x)) \cdot \nabla\rho(x).$$
L'hypothèse div $(h \circ \Pi) = 0$ permet d'annuler le premier terme. Pour annuler le dernier terme, il est nécessaire d'utiliser l'hypothèse $h.n = 0$ puis de montrer que $\nabla\rho(x) = n_{\Pi(x)}$. Cette dernière égalité résulte de deux remarques. Tout d'abord, l'égalité est vraie pour un point de la frontière (la frontière est une ligne de niveau de ρ et donc $\nabla\rho$ est orthogonal à la frontière). En dérivant l'égalité $\rho(x)^2 = \mid x - \Pi(x) \mid^2$ et en utilisant $n_{\Pi(x)} = \frac{x-\Pi(x)}{|x-\Pi(x)\,|}$ on en déduit le résultat.

– Sachant que $h \in L^\infty(\overline{\Omega})$ on a
$$\int_\Omega |h_\delta(x)|^4 dx \leq \int_{\rho(x)\leq R} |\phi_\delta(\rho(x))|^4 |h(\Pi(x))|^4 dx,$$
$$\int_\Omega |h_\delta(x)|^4 dx \leq |h|^4_\infty \int_{\rho(x)\leq R} |\phi_\delta(\rho(x))|^4 dx.$$
On effectue le changement de variables Tub$_R\Gamma \to [0, R] \times \Gamma$, $x \mapsto (\rho(x), \Pi(x))$ dont le Jacobien est borné. On déduit en utilisant le résultat (III.3.3) que
$$\int_\Omega |h_\delta(x)|^4 dx \leq C|h|^4_\infty \int_0^R |\phi_\delta(\rho)|^4 d\rho \leq C\delta^4.$$
Finalement, la dernière relation est directement obtenue en utilisant le fait que $|u|_4 \leq C\|u\|_1$ pour $u \in V_1$ (voir [63]) :
$$|b(u, h_\delta, u)| \leq |u|_4 |\nabla u|_2 |h_\delta|_4 \leq C\delta\|u\|_1^2.$$
– Dans le cas bidimensionnel, on va voir que l'on peut se passer de l'hypothèse (III.3.1). Les travaux de O. Ladyzhenskaya [53] prouve l'existence d'une fonction $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que h se prolonge en un champ de vecteurs sur Ω du type $h_0 =$ rot ξ. De plus, la construction de ξ (voir [53], p. 26) nous montre que l'on peut choisir ξ tel que

$\xi|_\Gamma = 0,$
$\xi(x) = R$ pour $\rho(x) > R,$
l'application $x \to (\Pi(x), \xi(x))$ soit un difféomorphisme de Tub$_R\Gamma$ sur $\Gamma \times [0; R]$.

Comme dans le cas tridimensionnel, on introduit la fonction ϕ_δ (voir III.3.2) et on pose
$$h_\delta(x) = \phi_\delta(\xi(x))h_0(x).$$
Ce champ de vecteurs est bien défini sur $\overline{\Omega}$. De plus on a clairement $h_\delta = h$ sur Γ.

– Puisque les fonctions ϕ_δ et ξ sont de classe $\mathcal{C}^2$, en utilisant des résultats de régularité (voir [53]), on déduit
$$h_\delta \in H^2(\Omega).$$
– De part la définition de h_δ, on a
$$\text{div } (h_\delta(x)) = \phi_\lambda(\xi(x)) \text{ div } (h_0(x)) + \phi'_\lambda(\xi(x))h_0(x) \cdot \nabla\xi(x).$$
Puisque $h_0 =$ rot ξ (lorsque $d = 2$) on annule le premier terme. Pour annuler le second, on remarque que rot $\xi.\nabla\xi = 0$.
La fin de la preuve est faite exactement de la même manière que dans le cas tridimensionnel.

■

L'idée de la preuve du théorème III.1.1 est d'employer le lemme précédent pour une valeur fixée de δ (son choix sera déterminée plus précisement par la suite) : on pose $v = u + h_\delta$ pour que les conditions de frontière sur v soient homogènes. Ainsi, puisque $h_\delta - h \in V_1 \cap H^2$ le théorème III.1.1 sera prouvé si l'on montre que pour un δ approprié il existe une solution unique (φ, u, σ) de (III.1.1) sur $[0, T^*[$ telle que

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^2(0,T^*;\Phi_4) \cap L^\infty(0,T^*;\Phi_2),\\
&u \in L^2(0,T^*;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T^*;V_1),\\
&\sigma \in L^2(0,T^*;\Sigma_2) \cap L^\infty(0,T^*;\Sigma_1).
\end{aligned}$$

Bien entendu, on a une formulation similaire pour le théorème III.1.2.

3.2 Approximations de Galerkin

On emploie la méthode Fadeo-Galerkin qui consiste à construire des solutions approchées par réduction à la dimension finie. Sachant que Φ_2, V_1 et Σ_1 sont des espaces de Hilbert séparables, il existe des bases hilbertiennes $(\psi_i)_{i\geq 1}$, $(w_i)_{i\geq 1}$ et $(\tau_i)_{i\geq 1}$ de Φ_2, V_1 et Σ_1 respectivement. De plus, on peut supposer que $(\psi_i)_{i\geq 1}$ sont des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ avec domaine Φ_2, $(w_i)_{i\geq 1}$ les fonctions propres de l'opérateur de Stokes A avec domaine $V_1 \cap H^2$ et $(\tau_i)_{i\geq 1}$ les fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ avec domaine Σ_2. On cherche trois fonctions de la forme

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\psi_i, \quad u_n(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) w_i, \quad \sigma_n(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)\tau_i,$$

où α_i, β_i et γ_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi_n(0)$, $u_n(0)$ et $\sigma_n(0)$ étant respectivement les projections orthogonales de φ_0, u_0 et σ_0 sur $\Psi_n = Vect((\psi_i)_{1\leq i\leq n})$, $\mathcal{V}_n = Vect((w_i)_{1\leq i\leq n})$ et $\mathcal{T}_n = Vect((\tau_i)_{1\leq i\leq n})$ satisfaisant les équations différentielles ordinaires suivantes :

Pour tout $\psi \in \Psi_n$, $w \in \mathcal{V}_n$ et $\tau \in \mathcal{T}_n$,

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\psi + \int_\Omega B(\varphi_n)\nabla\mu_n \cdot \nabla\psi - \int_\Omega (u_n \cdot \nabla\psi)\varphi_n - \int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\psi)\varphi_n = 0, \tag{III.3.4}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t}.w &+ b(u_n,u_n,w) + b(u_n,h_\delta,w) + b(h_\delta,u_n,w) + b(h_\delta,h_\delta,w)\\
&+ 2\int_\Omega \eta(\varphi_n)D(u_n) : D(w) + 2\int_\Omega \eta(\varphi_n)D(h_\delta) : D(w)\\
&+ \int_\Omega \sigma_n : \nabla w = -\int_\Omega (w\cdot\nabla\mu_n)\varphi_n,
\end{aligned} \tag{III.3.5}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} : \tau &+ \underline{b}(u_n,\sigma_n,\tau) + \underline{b}(h,\sigma_n,\tau) + \int_\Omega g_a(\sigma_n,u_n) : \tau\\
&+ \int_\Omega g_a(\sigma_n,h_\delta) : \tau + \int_\Omega l(\varphi_n)\sigma_n : \tau + \varepsilon\int_\Omega \nabla\sigma_n : \nabla\tau\\
&= \int_\Omega \nu(\varphi_n)D(u_n) : \tau + \int_\Omega \nu(\varphi_n)D(h_\delta) : \tau,
\end{aligned} \tag{III.3.6}$$

$$\mu_n = -\alpha^2\Delta\varphi_n + F'(\varphi_n). \tag{III.3.7}$$

Ce système est un ensemble d'équations différentielles ordinaires en les inconnues $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, $(\beta_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$. Les fonctions B, η, F', l et ν étant localement de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale $(\varphi_n, u_n, \sigma_n)$ sur un intervalle $[0, t_n[$.

3.3 Estimations

Dans cette partie, pour simplifier, on note simplement φ, μ, u et σ à la place de φ_n, μ_n, u_n et σ_n. Premièrement, on rappelle un résultat essentiel sur l'équation de Cahn-Hilliard qui permet d'utiliser le lemme III.2.4 :

Lemme III.3.2
Toute solution $\varphi \in \Phi_1$ de l'équation de Cahn-Hilliard (première ligne du système (III.1.1)*), avec un champ de vitesse donné $v(t) \in V_0$, vérifie*

$$\frac{\partial}{\partial t} m(\varphi) = 0,$$

et ainsi, la moyenne du paramètre d'ordre sera conservée au cours du temps (tant que la solution existe bien entendu !) :

$$m(\varphi(t)) = m(\varphi_0).$$

Preuve : Cette propriété est évidente du point de vue physique (les deux fluides restent dans les mêmes proportions au cours du temps lorsque il n'y a pas de flux à travers les parois). Du point de vue mathématique, c'est une application directe de la formulation faible en prenant pour fonction test $\psi = 1$ dans (III.3.4). ■

Estimations H^1 pour φ

En prenant $\psi = \mu$ comme fonction test dans l'équation (III.3.4), celle ci devient

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \mu\right) + \int_\Omega B(\varphi)\nabla\mu \cdot \nabla\mu - \int_\Omega (u \cdot \nabla\mu)\varphi - \int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\mu)\varphi = 0.$$

En utilisant la définition du potentiel μ (voir (III.1.1)) et le fait que $\partial_n \varphi|_\Gamma = 0$, une intégration par parties permet d'écrire le premier terme sous la forme

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \mu\right) = -\alpha^2 \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Delta\varphi + \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} F'(\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2 |\nabla\varphi|_2^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\int_\Omega F(\varphi).$$

L'hypothèse $B_1 \leq B$ (III.1.2) implique la majoration suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + B_1|\nabla\mu|_2^2 \leq \int_\Omega (u \cdot \nabla\mu)\varphi + \left|\int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\mu)\varphi\right|.$$

Il est essentiel de voir que le terme couplé $\int_\Omega (u \cdot \nabla\mu)\varphi$ n'a pas besoin d'être minoré car il est compensé par un terme analogue issu de l'équation de Navier-Stokes. Pour ce qui est du dernier terme, remarquons que, grâce aux conditions au bord

$$\int_\Omega h_\delta \cdot \nabla\mu = \int_\Omega \text{div } (\mu h_\delta) = \int_{\partial\Omega} \mu(h_\delta.n) = 0,$$

et on peut donc écrire :

$$\left|\int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\mu)\varphi\right| = \left|\int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\mu)(\varphi - m(\varphi))\right|.$$

Ainsi, les applications successives de l'injection $H^1 \subset L^4$ et des lemmes III.2.3 et III.3.1 permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (h_\delta \cdot \nabla\mu)\varphi\right| &\leq |\nabla\mu|_2 |h_\delta|_4 |\varphi - m(\varphi)|_4 \\ &\leq \frac{B_1}{2}|\nabla\mu|_2^2 + C_1(\Omega)^2\delta^2|\nabla\varphi|_2^2.\end{aligned}$$

Cette étape a permis de contrôler tous les termes de droite. Le terme $|\nabla\mu|_2^2$ apparaisant à gauche est très riche. En effet, comme dans les travaux de F. Boyer [8], sous les hypothèses (III.1.6) et (III.1.7), on peut prouver que ce terme vérifie

$$|\nabla\mu|_2^2 \geq \alpha^2|\Delta\varphi|_2^2 + C_1|\nabla\varphi|_2^2 + C_1F_3(m(\varphi_0))\int_\Omega F(\varphi) - 2C_2F_4(m(\varphi_0)),$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de α, $|\Omega|$ et F_5. Ainsi, la nouvelle estimation devient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + \widetilde{C}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + \frac{B_1}{2}|\nabla\mu|_2^2 + \alpha^2B_1|\Delta\varphi|_2^2 \\ \leq \int_\Omega (u\cdot\nabla\mu)\varphi + C_1(\Omega)\delta|\nabla\varphi|_2^2 + C.\end{aligned}$$

Dans la suite, on devra donc choisir δ tel que $2C_1(\Omega)\delta \leq \widetilde{C}\alpha^2$. Avec une telle relation, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + \widetilde{C}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) \\ + \frac{B_1}{2}|\nabla\mu|_2^2 + \alpha^2B_1|\Delta\varphi|_2^2 \leq \int_\Omega (u\cdot\nabla\mu)\varphi + C.\end{aligned} \tag{III.3.8}$$

Estimation L^2 pour u

A présent, on choisit $w = u$ comme fonction test dans l'équation (III.3.5) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + b(u,u,u) + b(u,h_\delta,u) + b(h_\delta,u,u) + b(h_\delta,h_\delta,u) \\ + 2\int_\Omega \eta(\varphi)D(u) : D(u) + 2\int_\Omega \eta(\varphi)D(h_\delta) : D(u) + \int_\Omega \sigma : \nabla u = -\int_\Omega (u\cdot\nabla\mu)\varphi.\end{aligned}$$

Ici, on utilise le fait que u et h_δ sont des champs de vecteurs à divergence nulle, et que les termes $b(u,u,u)$ et $b(h_\delta,u,u)$ sont nuls (d'après l'antisymétrie de l'application bilinéaire $b(v,.,.)$, $v \in V_0$, voir le lemme III.2.2. D'autres parts, l'hypothèse $\eta_1 \leq \eta$ (III.1.3) et d'après l'inégalité de Korn, on a

$$2\int_\Omega \eta(\varphi)D(u) : D(u) \geq \eta_1|\nabla u|_2^2.$$

On utilise d'une part le lemme III.3.1 avec $\delta < \dfrac{\eta_1}{8C(\Omega)C_1(\Omega)}$ et d'autre part l'inégalité de Poincaré :

$$|b(u,h_\delta,u)| \leq |h_\delta|_4|\nabla u|_2|u|_4 \leq C_1(\Omega)\delta\|u\|_1^2 \leq \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2.$$

Bien sûr, on ne touche pas au terme couplé $-\int_\Omega (u\cdot\nabla\mu)\varphi$ qui va s'annuler en ajoutant l'estimation (III.3.8) et celle trouvée dans ce paragraphe. Pour le reste des termes, il suffit d'utiliser des estimations classiques en veillant toujours à contrôler la norme L^2 du gradient de vitesse :

$$\begin{aligned}&|b(h_\delta,h_\delta,u)| \leq |h_\delta|_4|\nabla h_\delta|_2|u|_4 \leq C|\nabla u|_2 \leq C + \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2,\\ &\left|\int_\Omega \eta(\varphi)D(h_\delta) : D(u)\right| \leq \eta_2|\nabla h_\delta|_2|\nabla u|_2 \leq C + \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2,\\ &\left|\int_\Omega \sigma : \nabla u\right| \leq \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2 + C|\sigma|_2^2.\end{aligned}$$

et l'on déduit donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|u|_2^2}{2}\right) + \frac{\eta_1}{2}|\nabla u|_2^2 \leq -\int_\Omega (u\cdot\nabla\mu)\varphi + C|\sigma|_2^2 + C. \tag{III.3.9}$$

Estimation L^2 pour σ

On prend $\tau = \sigma$ comme fonction test dans (III.3.6) qui devient alors :

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \sigma\right) + \underline{b}(u,\sigma,\sigma) + \underline{b}(h_\delta,\sigma,\sigma) + \int_\Omega g_a(\sigma,u) : \sigma + \int_\Omega g_a(\sigma,h_\delta) : \sigma$$
$$+ \int_\Omega l(\varphi)\, \sigma : \sigma + \varepsilon \int_\Omega \nabla\sigma : \nabla\sigma = \int_\Omega \nu(\varphi) D(u) : \sigma + \int_\Omega \nu(\varphi) D(h_\delta) : \sigma.$$

Les quantités u, h_δ étant à divergence nulle et tangentes au bord du domaine : $h_\delta.n = u.n = 0$ sur Γ, on peut utiliser le résultat du lemme III.2.2 pour obtenir la majoration suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma|_2^2}{2}\right) + l_1|\sigma|_2^2 + \varepsilon|\nabla\sigma|_2^2$$
$$\leq \left|\int_\Omega \nu(\varphi)D(u) : \sigma\right| + \left|\int_\Omega g_a(\sigma,u) : \sigma\right| + \left|\int_\Omega g_a(\sigma,h_\delta) : \sigma\right| + \left|\int_\Omega \nu(\varphi)D(h_\delta) : \sigma\right|.$$

Le dernier terme est estimé, en utilisant le fait que $h \in H^1$ et que ν et η sont bornées (hypothèse (III.1.3)) :

$$\left|\int_\Omega \nu(\varphi)D(h_\delta) : \sigma\right| \leq f_2\eta_2|\nabla h_\delta|_2|\sigma|_2 \leq \frac{f_2^2\eta_2^2|\nabla h_\delta|_2^2}{2l_1} + \frac{l_1}{2}|\sigma|_2^2.$$

De même, on a :

$$\left|\int_\Omega \nu(\varphi)D(u) : \sigma\right| \leq \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2 + C|\sigma|_2^2.$$

Les termes restant sont les termes les plus difficiles à traiter car ils sont non linéaires (et généralement non nuls contrairement aux termes du type $b(u,w,w)$). Néanmoins, à l'aide du lemme III.2.1 et de la proposition III.2.2 on peut écrire :

$$\left|\int_\Omega g_a(\sigma,u) : \sigma\right| \leq 2|a||(\sigma.\sigma,\nabla u)| \leq 2|a||\sigma|_3|\sigma|_6|\nabla u|_2 \leq \frac{\eta_1}{8}|\nabla u|_2^2 + a^2C|\sigma|_3^2|\sigma|_6^2,$$

où C ne dépend pas du coefficient rhéologique a. Le fait que C ne dépende pas de a est essentiel pour la preuve du théorème III.1.2 correspondant au cas $a = 0$. C'est ici que se trouve la source de la non résolution du problème global (même en dimension 2 ! voir par exemple [33, 44]).

Pour le terme semblable avec h_δ à la place de u, on a la même estimation. Il ne reste plus que le terme $|\sigma|_3^2|\sigma|_6^2$ qui, estimé à l'aide d'inégalités de Sobolev (énoncées dans le lemme III.2.5), se majore par :

$$|\sigma|_3^2|\sigma|_6^2 \leq C(|\sigma|_2^4 + |\sigma|_2^2|\nabla\sigma|_2^2 + |\sigma|_2^3|\nabla\sigma|_2 + |\nabla\sigma|_2|\sigma|_2^3),$$
$$|\sigma|_3^2|\sigma|_6^2 \leq C(|\sigma|_2^2 + |\nabla\sigma|_2^2)^2.$$

Regroupant toutes ces estimations, on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma|_2^2}{2}\right) + \varepsilon|\nabla\sigma|_2^2 \leq \frac{\eta_1}{4}|\nabla u|_2^2 + C|\sigma|_2^2 + a^2C\|\sigma\|_1^4 + C. \tag{III.3.10}$$

Les trois estimations que nous avons obtenues ne permettent pas de conclure. En effet, les termes non linéaires de la loi constitutive d'Oldroyd font apparaître dans le membre de droite la norme H^1 du tenseur σ. Celle-ci n'étant pas controlée, nous sommes donc obligés de pousser les estimations à l'ordre suivant. Par contre, puisque le coefficient a est en facteur du seul terme "gênant" $\|\sigma\|_1$, il est clair que l'on aura des estimations satisfaisantes dès cette étape dans le cas $a = 0$. On y reviendra au cours de la preuve du théorème III.1.2.

Estimation H^2 pour φ

Utilisant $\psi = \Delta^2\varphi$ dans l'équation (III.3.4) on a :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \Delta^2\varphi\right) + b(u,\varphi,\Delta^2\varphi) + b(h_\delta,\varphi,\Delta^2\varphi) - \int_\Omega \operatorname{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)\Delta^2\varphi = 0.$$

A l'aide d'une intégration par parties sur le premier terme (les termes de bord s'annulant car $\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n}|_\Gamma = 0$) et de la définition du potentiel $\Delta\mu = -\alpha^2\Delta^2\varphi + \Delta(F'(\varphi))$ sur le dernier terme, on peut écrire les (in)égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \alpha^2\int_\Omega B(\varphi)|\Delta^2\varphi|^2 \\
&\qquad = -b(u,\varphi,\Delta^2\varphi) - b(h_\delta,\varphi,\Delta^2\varphi) + \int_\Omega B(\varphi)\Delta(F'(\varphi))\Delta^2\varphi + \int_\Omega B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\mu\Delta^2\varphi, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \alpha^2 B_1|\Delta^2\varphi|_2^2 \\
&\qquad \le |u|_2|\nabla\varphi|_\infty|\Delta^2\varphi|_2 + |h_\delta|_\infty|\nabla\varphi|_2|\Delta^2\varphi|_2 + B_2|\Delta(F'(\varphi))|_2|\Delta^2\varphi|_2 + |B'|_\infty|\nabla\varphi\nabla\mu|_2|\Delta^2\varphi|_2.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young permet de regrouper les termes en $|\Delta^2\varphi|_2^2$ de façon à garder le contrôle sur eux ; il reste alors une inégalité du type :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \alpha^2 B_1|\Delta^2\varphi|_2^2 \le C(|u|_2^2|\nabla\varphi|_\infty^2 + |h_\delta|_\infty^4 + |\nabla\varphi|_2^4 + |\Delta(F'(\varphi))|_2^2 + |\nabla\varphi\nabla\mu|_2^2) + \frac{\alpha^2 B_1}{6}|\Delta^2\varphi|_2^2.$$

Il faut maintenant contrôler tous les termes de droite. Le premier, grâce au lemme III.2.4 se majore facilement :

$$|u|_2^2|\nabla\varphi|_\infty^2 \le |u|_2^2|\nabla\varphi|_2|\Delta^2\varphi|_2 \le \frac{\alpha^2 B_1}{6}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|u|_2^4|\nabla\varphi|_2^2.$$

Pour le terme $|\Delta(F'(\varphi))|_2^2$, on dérive deux fois F' puis on estime le résultat en utilisant à la fois l'inégalité $|\nabla\varphi|_3^2|\nabla\varphi|_6^2 \le C\|\nabla\varphi\|_1^4$ (qui se montre comme celle du même type sur σ, voir le paragraphe précédent), et à la fois l'hypothèse (III.1.6) (ce type de calcul est similaire à ceux présenté dans [8] et [84]) :

$$\begin{aligned}
|\Delta(F'(\varphi))|_2^2 &\le |F'''(\varphi)|_\infty|\nabla\varphi|_6^2|\nabla\varphi|_3^2 + |F''(\varphi)|_\infty^2|\Delta\varphi|_2^2, \\
&\le C(1 + |\varphi - m(\varphi)|_\infty^{2q})\|\nabla\varphi\|_1^4 + C(1 + |\varphi - m(\varphi)|_\infty^{2q+2})|\Delta\varphi|_2^2, \\
&\le C(1 + |\Delta\varphi|_2^{2q})\|\nabla\varphi\|_1^4 + C|\Delta\varphi|_2^2.
\end{aligned}$$

Par définition du potentiel μ, le dernier terme donne

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi\nabla\mu|_2^2 &\le \alpha^2|\nabla\varphi\nabla\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\varphi\nabla(F'(\varphi))|_2^2, \\
&\le \underbrace{\alpha^2|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta\varphi|_2^2}_{A_1} + \underbrace{|\nabla\varphi|_6^2|\nabla\varphi|_3^2|F''(\varphi)|_\infty^2}_{A_2}.
\end{aligned}$$

Pour A_1, on utilise l'inégalité de Agmon

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi|_\infty^2 &= |\nabla(\varphi - m(\varphi))|_\infty^2 \\
&\le \|\nabla(\varphi - m(\varphi))\|_1\|\nabla(\varphi - m(\varphi))\|_2 \\
&\le \|\varphi - m(\varphi)\|_2\|\varphi - m(\varphi)\|_3,
\end{aligned}$$

puis le lemme III.2.3 qui stipule que :

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 \le |\Delta\varphi|_2|\nabla\Delta\varphi|_2,$$

et enfin une intégration par parties
$$|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq |\Delta\varphi|_2|\Delta^2\varphi|_2.$$
Ceci donne au final :
$$\begin{aligned}A_1 = |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta\varphi|_2^2 &\leq |\Delta\varphi|_2^{5/2}|\Delta^2\varphi|_2^{3/2}\\ &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{6}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\Delta\varphi|_2^{10}.\end{aligned}$$
Pour le terme A_2, l'hypotèse (III.1.6) et l'injection $H^2 \subset L^\infty$ permet de montrer que :
$$A_2 = |\nabla\varphi|_3^2|\nabla\varphi|_6^2|F''(\varphi)|_\infty^2 \leq C(1+|\Delta\varphi|_2^{q+1})\|\nabla\varphi\|_1^4.$$
En regroupant toutes les estimations obtenues, on en déduit l'existence d'une fonction polynomiale P telle que
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \frac{\alpha^2 B_1}{2}|\Delta^2\varphi|_2^2 \leq (\|\nabla\varphi\|_1^2 + |u|_2^2)^2 P(\|\nabla\varphi\|_1^2) + C|\Delta\varphi|_2^2 + C|h_\delta|_\infty^4. \tag{III.3.11}$$

Estimation H^1 pour u

Pour cette estimation, on utilise Au comme fonction test dans l'équation (III.3.5) (cette possibilité est justifiée par le fait que l'on a décomposé u dans une base particulière, celle de vecteurs propres de l'opérateur de Stokes A) :
$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, Au\right) &+ \overbrace{b(u,u,Au)}^{T_1} + \overbrace{b(u,h_\delta,Au)}^{T_2} + \overbrace{b(h_\delta,u,Au)}^{T_3} + \overbrace{b(h_\delta,h_\delta,Au)}^{T_4}\\ &\underbrace{-2\int_\Omega \operatorname{div}\,(\eta(\varphi)D(u))\cdot Au}_{T_5}\ \underbrace{-2\int_\Omega \operatorname{div}\,(\eta(\varphi)D(h_\delta))\cdot Au}_{T_6}\ \underbrace{-\int_\Omega \operatorname{div}\,\sigma\cdot Au}_{T_7} = \underbrace{-\int_\Omega \mu\nabla\varphi\cdot Au}_{T_8}.\end{aligned}$$
Le terme T_1 se majore en utilisant les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5) :
$$\begin{aligned}T_1 = |b(u,u,Au)| &\leq C|u|_6|\nabla u|_3|Au|_2,\\ &\leq C(|u|_2+|\nabla u|_2)(|u|_2+|\nabla u|_2^{1/2}|\Delta u|_2^{1/2})|Au|_2,\\ &\leq C\|u\|_1^2|Au|_2 + C\|u\|_1^{3/2}|Au|_2^{3/2},\\ &\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C(\|u\|_1^4+\|u\|_1^6).\end{aligned}$$
A l'aide de l'inégalité de Agmon on a aussi la majoration suivante :
$$\begin{aligned}T_2 = |b(u,h_\delta,Au)| &\leq |u|_\infty|\nabla h_\delta|_2|Au|_2\\ &\leq C|\nabla u|_2^{1/2}|Au|_2^{3/2}\\ &\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C|\nabla u|_2^2,\end{aligned}$$
les autres termes du même type s'estimant facilement :
$$T_3 = |b(h_\delta,u,Au)| \leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C|h_\delta|_\infty^4 + |\nabla u|_2^4,$$
$$T_4 = |b(h_\delta,h_\delta,Au)| \leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C|h_\delta|_\infty^2|\nabla h_\delta|_2^2.$$

Le terme suivant se décompose en deux puis trois parties :

$$\begin{aligned}
T_5 &= -\int_\Omega \text{div } (\eta(\varphi)D(u)) \cdot Au \\
&= -\int_\Omega \eta'(\varphi)\nabla\varphi D(u) \cdot Au - \int_\Omega \eta(\varphi)\Delta u \cdot Au, \\
&= -\int_\Omega \eta'(\varphi)\nabla\varphi D(u) \cdot Au + \int_\Omega \eta(\varphi)Au \cdot Au - \int_\Omega \eta(\varphi)\nabla\pi \cdot Au.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (III.1.3) sur η implique alors que $\int_\Omega \eta(\varphi)Au \cdot Au$ est minoré par $\eta_1|Au|_2^2$. C'est ce terme qui va permettre d'absorber tous les autres termes du type $\|u\|_2$. Par exemple, en utilisant successivement les lemmes III.2.4 et III.2.9 on va montrer que l'on a une estimation dont toutes les puissances de $|Au|_2$ et de $|\Delta^2\varphi|_2$ sont strictement inférieures à 2. On pourra donc grâce à l'inégalité de Young obtenir l'inégalité voulue (voir l'équation (III.3.12) par la suite) :

D'un coté, après intégration par parties (en se souvenant que div $u = 0$, et que $u = u_n$ est un élément de $\mathcal{V}_n$, sous ensemble de l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur A) on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \eta(\varphi)\nabla\pi \cdot Au\right| &= \left|\int_\Omega \eta'(\varphi)\nabla\varphi\ \pi \cdot Au\right|, \\
&\leq |\eta'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\pi|_2|Au|_2, \\
&\leq C|\eta'|_\infty|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\Delta^2\varphi|_2^{1/2}\|u\|_1|Au|_2, \\
&\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + \frac{\alpha^2 B_1}{24}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2\|u\|_1^4.
\end{aligned}$$

D'un autre coté, en utilisant encore le lemme III.2.4 :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \eta'(\varphi)\nabla\varphi D(u) \cdot Au\right| &\leq |\eta'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\nabla u|_2|Au|_2, \\
&\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + \frac{\alpha^2 B_1}{24}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2|\nabla u|_2^4.
\end{aligned}$$

On écrit le terme identique avec h_δ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
T_6 = \left|\int_\Omega \text{div } (\eta(\varphi)D(h_\delta)) \cdot Au\right| &= \left|\int_\Omega \eta'(\varphi)\nabla\varphi D(h_\delta) \cdot Au + \int_\Omega \eta(\varphi)\Delta h_\delta \cdot Au\right|, \\
&\leq |\eta'|_\infty|\nabla h_\delta|_2|Au|_2 + \eta_2|\Delta h_\delta|_2|Au|_2, \\
&\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C(|\nabla h_\delta|_2^2 + |\Delta h_\delta|_2^2).
\end{aligned}$$

Pour le terme T_7, l'égalité de Cauchy-Schwarz donne

$$T_7 = \left|\int_\Omega \text{div } (\sigma) \cdot Au\right| \leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C|\nabla\sigma|_2^2,$$

alors que le terme T_8 est plus subtil à estimer : on utilise la définition du potentiel μ :

$$\begin{aligned}
T_8 = \left|\int_\Omega \mu\nabla\varphi \cdot Au\right| &\leq \alpha^2\left|\int_\Omega \Delta\varphi\nabla\varphi \cdot Au\right| + \left|\int_\Omega F'(\varphi)\nabla\varphi \cdot Au\right|, \\
&\leq \alpha^2|\Delta\varphi|_2|\nabla\varphi|_\infty|Au|_2 + \left|\int_\Omega \nabla(F(\varphi)) \cdot Au\right|, \\
&\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + \frac{\alpha^2 B_1}{24}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2|\Delta\varphi|_2^4.
\end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer que le terme $\left|\int_\Omega \nabla(F(\varphi))\cdot Au\right|$ est nul. En effet, $u=u_n$ est une combinaison linéaire de vecteurs propres de l'opérateur A. Il est donc, comme u, à divergence nulle.

Les estimations que nous venons d'obtenir pour les termes T_1,...,T_8 se résument à :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|_2^2}{2}\right)+\frac{\eta_1}{2}|Au|_2^2 \leq &\frac{\alpha^2 B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+(\|\nabla\varphi\|_1^2+\|u\|_1^2)^2+(\|\nabla\varphi\|_1^2+\|u\|_1^2)^3\\ &+C(|h_\delta|_\infty^4+|h_\delta|_\infty^2|\nabla h_\delta|_2^2+|\nabla h_\delta|_2^2+|\Delta h_\delta|_2^2+|\nabla\sigma|_2^2).\end{aligned} \tag{III.3.12}$$

Estimation H^1 pour σ

On pose $\tau=-\Delta\sigma$ dans l'équation (III.3.6) (là aussi ceci est rendu possible car on a choisi une base spéciale pour $\mathcal{T}_n$) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t},-\Delta\sigma\right)-\underline{b}(u,\sigma,\Delta\sigma)-\underline{b}(h_\delta,\sigma,\Delta\sigma)-\int_\Omega g_a(\sigma,u):\Delta\sigma-\int_\Omega g_a(\sigma,h_\delta):\Delta\sigma\\ -\int_\Omega l(\varphi)\sigma:\Delta\sigma+\varepsilon\int_\Omega\Delta\sigma:\Delta\sigma=-\int_\Omega\nu(\varphi)D(u):\Delta\sigma-\int_\Omega\nu(\varphi)D(h_\delta):\Delta\sigma.\end{aligned}$$

Avec une première intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\sigma|_2^2}{2}\right)+\int_\Omega l(\varphi)|\nabla\sigma|^2+\varepsilon|\Delta\sigma|_2^2=-\int_\Omega l'(\varphi)\nabla\varphi\,\sigma\overset{(3)}{:}\nabla\sigma+\underline{b}(u,\sigma,\Delta\sigma)+\underline{b}(h_\delta,\sigma,\Delta\sigma)\\ +(g_a(\sigma,u),\Delta\sigma)+(g_a(\sigma,h_\delta),\Delta\sigma)-\int_\Omega\nu(\varphi)D(h_\delta):\Delta\sigma-\int_\Omega\nu(\varphi)D(u):\Delta\sigma.\end{aligned}$$

En utilisant les résultats du lemme III.2.1, on peut estimer chaque terme du membre de droite afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\sigma|_2^2}{2}\right)+l_1|\nabla\sigma|^2+\varepsilon|\Delta\sigma|_2^2\leq\ &|l'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2\\ &+|u|_6|\nabla\sigma|_3|\Delta\sigma|_2+|h_\delta|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2\\ &+|a+1||(\nabla u.\sigma,\Delta\sigma)|+|a-1||(\sigma\cdot\nabla u,\Delta\sigma)|\\ &+|a+1||(\nabla h_\delta.\sigma,\Delta\sigma)|+|a-1||(\sigma\cdot\nabla h_\delta,\Delta\sigma)|\\ &+f_2\eta_2|\nabla u|_2|\Delta\sigma|_2+f_2\eta_2|\nabla h_\delta|_2|\Delta\sigma|_2.\end{aligned}$$

On a vu (proposition III.2.2) que $|(\nabla u.\sigma,\Delta\sigma)|$ et $|(\sigma\cdot\nabla u,\Delta\sigma)|$ pouvaient être controlées par $|\nabla u|_3|\sigma|_6|\Delta\sigma|_2$ (on utilisera ces mêmes estimations pour les termes similaires faisant intervenir h_δ). Une inégalité de Young classique fournit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\sigma|_2^2}{2}\right)+l_1|\nabla\sigma|_2^2+\varepsilon|\Delta\sigma|_2^2\leq\ &\overbrace{|l'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2}^{S_1}+C\overbrace{|u|_6^2|\nabla\sigma|_3^2}^{S_2}+C\overbrace{|\nabla u|_3^2|\sigma|_6^2}^{S_3}\\ &+C\underbrace{|h_\delta|_4^2|\nabla\sigma|_4^2}_{S_4}+C|\nabla u|_2^2+C|\nabla h_\delta|_2^2+\frac{\varepsilon}{4}|\Delta\sigma|_2^2.\end{aligned}$$

Il reste à étudier les trois termes S_1, S_2, S_3 et S_4 :

– Le terme S_1 se traite à l'aide du lemme III.2.4 permettant de contrôler la norme infinie du gradient du paramètre d'ordre φ :

$$\begin{aligned}S_1=|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2&\leq|\Delta\varphi|_2^{\frac{1}{2}}|\Delta^2\varphi|_2|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2\\ &\leq\frac{\alpha^2B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+C|\Delta\varphi|_2^{4}|\sigma|_2^2|\nabla\sigma|_2^2.\end{aligned}$$

– Quant au terme S_2, les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5), puis l'inégalité de Young permettent de le majorer ainsi :

$$\begin{aligned} S_2 = |u|_6^2|\nabla\sigma|_3^2 &\leq C|u|_2^2|\nabla\sigma|_2^2 + C|\nabla u|_2^2|\nabla\sigma|_2^2 + C|u|_2^2|\nabla\sigma|_2|\Delta\sigma|_2 + C|\nabla u|_2^2|\nabla\sigma|_2|\Delta\sigma|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}|\Delta\sigma|_2^2 + C(|u|_2^2 + |\nabla u|_2^2 + |\nabla\sigma|_2^2)^2 + C(|u|_2^2 + |\nabla u|_2^2 + |\nabla\sigma|_2^2)^3. \end{aligned}$$

– Avec des arguments similaires, il n'est pas difficile de prouver le même type de résultats pour S_3 :

$$S_3 = |\sigma|_6^2|\nabla u|_3^2 \leq \frac{\eta_1}{4}|Au|_2^2 + C(|\nabla u|_2^2 + |\sigma|_2^2 + |\nabla\sigma|_2^2)^2 + C(|\nabla u|_2^2 + |\sigma|_2^2 + |\nabla\sigma|_2^2)^3.$$

– Enfin, pour le terme S_4, l'inégalité de Sobolev (lemme III.2.5) permet à nouveau de conclure

$$S_4 = |h_\delta|_4^2|\nabla\sigma|_4^2 \leq C|\nabla\sigma|_2^2 + C|\nabla\sigma|_2|\Delta\sigma|_2.$$

En regroupant ces dernières inégalités, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\sigma|_2^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}|\Delta\sigma|_2^2 &\leq \frac{\eta_1}{4}|Au|_2^2 + \frac{\alpha^2 B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C(\|u\|_1^2 + \|\sigma\|_1^2)^2 \\ &+ C(\|u\|_1^2 + \|\sigma\|_1^2 + \|\nabla\varphi\|_1^2)^3 + C(|\nabla h_\delta|_2^2 + |h_\delta|_4^4 + |\nabla u|_2^2) + C. \end{aligned} \tag{III.3.13}$$

On a donc maintenant obtenu des estimations sur φ_n, u_n et σ_n dans des espaces adaptés et ainsi des convergences faibles (ou faible-$*$) pour des sous-suites de $\{\varphi_n\}$, $\{u_n\}$ et $\{\sigma_n\}$. Puisque l'on a des termes non linéaires dans le système, on sait qu'une convergence faible de chaque terme ne va pas suffir pour passer à la limite. Il va donc falloir obtenir de la convergence forte sur certains d'entre eux. Un moyen habituel d'y parvenir est d'avoir des estimations sur les dérivées en temps.

3.4 Estimations des dérivées

Le principe est d'isoler, dans les équations (III.3.4), (III.3.5), (III.3.6) et (III.3.7), les termes de dérivées temporelles. Il suffit pour cela de définir les projecteurs :

$$\begin{aligned} P_{\Psi_n} &: \Phi_2 \longrightarrow (\psi_i)_{1\leq i\leq n}, \\ P_{V_n} &: V_1 \longrightarrow (w_i)_{1\leq i\leq n}, \\ P_{\mathcal{T}_n} &: \Sigma_1 \longrightarrow (\tau_i)_{1\leq i\leq n}. \end{aligned}$$

En notant P^* le dual d'un opérateur, les équations (III.3.4), (III.3.5), (III.3.6) et (III.3.7) peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_n}{dt} = -P_{\Psi_n}^*\Big(\operatorname{div}\,(B(\varphi_n)\nabla\mu_n) + \operatorname{div}\,(\varphi_n v_n)\Big), \\ \dfrac{dv_n}{dt} = -P_{V_n}^*\Big(B(v_n,v_n) + E(\varphi_n,v_n) - \operatorname{div}\,(\sigma_n) + \varphi_n\nabla\mu_n\Big), \\ \dfrac{d\sigma_n}{dt} = -P_{\mathcal{T}_n}^*\Big(\operatorname{div}\,(\sigma_n v_n) + g_a(\sigma_n,v_n) + l(\varphi_n)\sigma_n - \varepsilon\Delta\sigma_n - \nu(\varphi_n)D(v_n)\Big), \end{cases}$$

où l'on a posé $E(\varphi,v).w = 2\displaystyle\int_\Omega \eta(\varphi)D(v) : D(w)$.

Le fait que tous les projecteurs soient orthogonaux dans L^2 implique que leur norme soit majorée par 1 (en tant qu'opérateurs linéaires). Plus précisement, P_{Ψ_n}, $P_{\mathcal{V}_n}$ et $P_{\mathcal{T}_n}$ sont les projecteurs respectivement dans Φ_1, V_s et Σ_s pour tout $s \geq 0$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&\|P_{\Psi_n}\|_{L(\Phi_1,\Phi_1)} \leq 1, \quad \|P^*_{\Psi_n}\|_{L(\Phi'_1,\Phi'_1)} \leq 1,\\
&\|P_{\mathcal{V}_n}\|_{L(V_s,V_s)} \leq 1, \quad \|P^*_{\mathcal{V}_n}\|_{L(V'_s,V'_s)} \leq 1,\\
&\|P_{\mathcal{T}_n}\|_{L(\Sigma_s,\Sigma_s)} \leq 1, \quad \|P^*_{\mathcal{T}_n}\|_{L(\Sigma'_s,\Sigma'_s)} \leq 1.
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'évaluer les termes auxquels on a appliqué les projecteurs.

Estimation L^2 pour $\partial_t \varphi_n$

On montre tout d'abord que si φ_n et v_n sont assez réguliers, par exemple en supposant

$$\begin{cases} \{\varphi_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;\varPhi_4) \cap L^\infty(0,T;\varPhi_2),\\ \{v_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;V_1 \cap H^2), \end{cases}$$

alors la suite

$$\left\{\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\varPhi_0). \tag{III.3.14}$$

En effet, $\partial_t \varphi_n$ a la même régularité que div $(B(\varphi_n)\nabla\Delta\varphi_n)$ (les autres termes étant clairement plus réguliers) et puisque

$$\text{div } (B(\varphi_n)\nabla\Delta\varphi_n) = B'(\varphi_n)\nabla\varphi_n \cdot \nabla\Delta\varphi_n + \Delta^2\varphi_n,$$

on obtient une borne sur ce terme en utilisant les résultats d'interpolation, voir partie 2.3 : $\{\varphi_n\}$ est bornée dans $L^4(0,T;\varPhi_3)$ ce qui implique en particulier

$$\begin{aligned}
&\{\nabla\varphi_n\} \text{ bornée dans } L^4(0,T;\varPhi_2) \quad \text{et}\\
&\{\nabla\Delta\varphi_n\} \text{ bornée dans } L^4(0,T;\varPhi_0).
\end{aligned}$$

Ensuite, il suffit de remarquer qu'en dimension deux ou trois, le produit $H^2 \times L^2$ s'injecte dans L^2 (voir le lemme III.2.6) pour en déduire

$$\{\nabla\varphi_n \cdot \nabla\Delta\varphi_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;\varPhi_0).$$

Estimation L^2 pour $\partial_t v_n$

Là encore, pour obtenir une estimation sur ce terme dérivé, on suppose tout d'abord que l'on a

$$\begin{cases} \{\varphi_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;\varPhi_4) \cap L^\infty(0,T;\varPhi_2),\\ \{v_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T;V_1),\\ \{\sigma_n\} \text{ bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_1). \end{cases}$$

Par des produits classiques d'espace de Lebesgue (par exemple en utilisant, en dimension inférieure strictement à 4, l'inclusion $H^1 \times H^1 \subset L^2$, voir lemme III.2.6), on obtient directement une borne pour $v_n \cdot \nabla v_n$, $\mu_n \cdot \nabla\varphi_n$, $\nabla\varphi_n \cdot \nabla v_n$ et Av_n dans $L^2(0,T;L^2)$, et donc on en déduit que

$$\{\text{ div } (\eta(\varphi_n)D(v_n))\} = \{\eta'(\varphi_n)\nabla\varphi_n \cdot \nabla v_n + \eta(\varphi_n)Av_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2).$$

Les estimations précédentes sont suffissantes pour affirmer que

$$\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_0). \tag{III.3.15}$$

Estimation L^2 pour $\partial_t \sigma_n$

Pour cette dernière estimation de dérivée, on suppose que

$$\begin{cases} \{v_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T;V_1), \\ \{\sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_2) \cap L^\infty(0,T;\Sigma_1), \end{cases}$$

alors, avec des arguments similaires aux cas précédents (lemme III.2.6), on a

$$\begin{aligned} L^2(0,T;H^2) \times L^\infty(0,T;H^1) \subset L^2(0,T;H^1) \quad &\Longrightarrow \quad \{v_n \cdot \sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;H^1), \\ L^2(0,T;H^1) \times L^\infty(0,T;H^1) \subset L^2(0,T;L^2) \quad &\Longrightarrow \quad \{D(v_n) \cdot \sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2), \end{aligned}$$

et plus généralement, la suite $\{g_a(\sigma_n, v_n)\}$ est bornée dans $L^2(0,T;L^2)$. Les autres termes sont clairement bornés dans $L^2(0,T;L^2)$ et on en conclue que :

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} \right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_0). \tag{III.3.16}$$

3.5 Passage à la limite

On est maintenant en mesure de conclure pour ce qui est du cas $a \neq 0$: si on définit l'énergie totale du système par

$$z(t) = \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla \varphi_n\|_1^2 + \int_\Omega F(\varphi_n) + \frac{1}{2}\|v_n\|_1^2 + \frac{1}{2}\|\sigma_n\|_1^2,$$

alors on peut remarquer qu'en effectuant la somme des inégalités trouvées lors des estimations *a priori* : (III.3.8), (III.3.9), (III.3.10), (III.3.11), (III.3.12) et (III.3.13), on obtient une inéquation différentielle ($\mathcal{P}$ étant un polynôme d'une variable réelle) :

$$z' + \frac{\alpha^2 B_1}{2}|\Delta^2 \varphi_n|_2^2 + \frac{\eta_1}{2}|\Delta v_n|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\Delta \sigma_n|_2^2 \leq \mathcal{P}(z). \tag{III.3.17}$$

On en déduit tout d'abord (utiliser $z' \leq \mathcal{P}(z)$) qu'il existe un temps $T^* > 0$ tel que la solution z soit bornée sur $[0;T]$ pour tout $T < T^*$, puis ensuite en intégrant (III.3.17) que φ_n, v_n et σ_n demeurent respectivement dans un borné de $L^2(0,T;\Phi_4)$, $L^2(0,T;V_1 \cap H^2)$ et $L^2(0,T;\Sigma_2)$ pour tout $T < T^*$. Plus précisement, on a pour tout $T < T^*$:

$$\begin{aligned} &\{\varphi_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Phi_4) \cap L^\infty(0,T;\Phi_2), \\ &\{v_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T;V_1), \\ &\{\sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_2) \cap L^\infty(0,T;\Sigma_1). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant les inégalités obtenues sur les dérivées temporelles (III.3.14), (III.3.15) et (III.3.16) on a aussi, pour tout $T < T^*$:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Phi_0), \\ &\left\{ \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_0), \\ &\left\{ \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} \right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_0). \end{aligned}$$

On applique alors le lemme III.2.10 qui permet d'extraire des sous-suites de $\{\varphi_n\}$, $\{v_n\}$ et $\{\sigma_n\}$, encore notées $\{\varphi_n\}$, $\{v_n\}$ et $\{\sigma_n\}$, vérifiant, pour tout $T < T^*$:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ dans } L^\infty(0,T;\Phi_2) \text{ faible-}*,\\
&\varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ dans } L^2(0,T;\Phi_4) \text{ faiblement},\\
&\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(0,T;\Phi_0) \text{ fortement et presque partout},\\
&\tfrac{\partial \varphi_n}{\partial t} \rightharpoonup \tfrac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ in } L^2(0,T;\Phi_0) \text{ faiblement},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v_n \rightharpoonup v \text{ dans } L^\infty(0,T;V_1) \text{ faible-}*,\\
&v_n \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0,T;V_1 \cap H^2) \text{ faiblement},\\
&v_n \longrightarrow v \text{ dans } L^2(0,T;V_0) \text{ fortement et presque partout},\\
&\tfrac{\partial v_n}{\partial t} \rightharpoonup \tfrac{\partial v}{\partial t} \text{ dans } L^2(0,T;V_0) \text{ faiblement},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ dans } L^\infty(0,T;\Sigma_1) \text{ faible-}*,\\
&\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ dans } L^2(0,T;\Sigma_2) \text{ faiblement},\\
&\sigma_n \longrightarrow \sigma \text{ dans } L^2(0,T;\Sigma_0) \text{fortement et presque partout},\\
&\tfrac{\partial \sigma_n}{\partial t} \rightharpoonup \tfrac{\partial \sigma}{\partial t} \text{ dans } L^2(0,T;\Sigma_0) \text{ faiblement}.
\end{aligned}$$

On sait alors que $\varphi_n(0) = P_{\Phi_n}(\varphi_0)$ converge faiblement vers $\varphi(0)$ dans l'espace $[\Phi_4, \Phi_0]_{1/2} = \Phi_2$. Puisque P_{Φ_n} converge fortement vers l'identité, on a bien $\varphi(0) = \varphi_0$. Le principe est identique pour la vitesse ($v_n(0)$ converge faiblement vers $v(0)$ dans V_1) et le tenseur des contraintes ($\sigma_n(0)$ converge faiblement vers $\sigma(0)$ dans Σ_1).

Finalement, la convergence forte de la (sous-)suite $\{v_n\}$ permet de passer à la limite dans les termes non linéaires de (III.1.1), en particulier dans les termes quadratiques du type $\sigma_n \cdot \nabla v_n$ ou $v_n \cdot \nabla v_n$. Ceci prouve le premier théorème.

4 Unicité de la solution

Dans ce paragraphe, on montre que la solution obtenue dans le premier théorème III.1.1 est unique.

Comme habituellement dans ce cas, on considère $(\varphi_1, v_1, \sigma_1)$ et $(\varphi_2, v_2, \sigma_2)$ deux solutions du système (III.1.1) qui sont dans la classe du théorème III.1.1

$$\begin{aligned}
&\varphi_1,\ \varphi_2 \in L^2(0,T;\Phi_4) \cap L^\infty(0,T;\Phi_2),\\
&v_1,\ v_2 \in L^2(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^\infty(0,T;V_1),\\
&\sigma_1,\ \sigma_2 \in L^2(0,T;\Sigma_2) \cap L^\infty(0,T;\Sigma_1),
\end{aligned}$$

et ayant même valeur initiale $(\varphi_0, v_0, \sigma_0)$. La fonction scalaire $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, la fonction vectorielle $v = v_1 - v_2$ et le tenseur $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ satisfont les relations suivantes (on a juste fait la différence des équations pour chaque solution) :

Pour tout $(\psi, w, \tau) \in \Phi_3 \times V_1 \times \Sigma_1$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + b(v, \varphi_1, \psi) + b(v_2, \varphi, \psi)\\
&\qquad - \alpha^2 \int_\Omega (B(\varphi_1) - B(\varphi_2)) \nabla\Delta\varphi_1 \cdot \nabla\psi - \alpha^2 \int_\Omega B(\varphi_2) \nabla\Delta\varphi \cdot \nabla\psi\\
&\qquad\qquad + \int_\Omega (BF''(\varphi_1) - BF''(\varphi_2)) \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\psi + \int_\Omega BF''(\varphi_2) \nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0,
\end{aligned} \tag{III.4.1}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, w\right) + b(v, v_1, w) + b(v_2, v, w) - \int_\Omega \text{div}\, \sigma.w$$
$$+ 2\int_\Omega (\eta(\varphi_1) - \eta(\varphi_2))D(v_1) : D(w) + 2\int_\Omega \eta(\varphi_2)D(v) : D(w) \tag{III.4.2}$$
$$= -\alpha^2 \int_\Omega (w \cdot \nabla\varphi_1)\Delta\varphi - \alpha^2 \int_\Omega (w \cdot \nabla\varphi)\Delta\varphi_2,$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tau\right) + \underline{b}(v, \sigma_1, \tau) + \underline{b}(v_2, \sigma, \tau) + \int_\Omega l(\varphi_2)\sigma : \tau$$
$$+ \int_\Omega (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))\sigma_1 : \tau + \varepsilon \int_\Omega \nabla\sigma : \nabla\tau + \int_\Omega (g_a(\sigma, v_1) + g_a(\sigma_2, v)) : \tau \tag{III.4.3}$$
$$= \int_\Omega (f\eta(\varphi_1) - f\eta(\varphi_2))D(v_1) : \tau + \int_\Omega f\eta(\varphi_2)D(v) : \tau,$$

avec des conditions initiales nulles.

$$\varphi(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \sigma(0) = 0.$$

Les fonctions de H^2 étant continues (en dimension inférieure ou égale à trois), les résultats de régularité sur les solutions prouvent que, par exemple, $\varphi_i \in C([0,T] \times \overline{\Omega})$, $i \in \{1; 2\}$ et donc plus généralement, il existe $R > 0$ tel que pour $i \in \{1; 2\}$ on ait

$$|\varphi_i(t,x)|_\infty \leq R, \quad \text{pour tout } (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega},$$
$$\|\varphi_i(t)\|_2 \leq R, \quad \|v_i(t)\|_1 \leq R, \quad \|\sigma_i(t)\|_1 \leq R \quad \text{pour presque tout } t \in [0,T].$$

4.1 Estimation de la différence $\varphi_1 - \varphi_2$

Prenons $-\alpha^2\Delta\varphi$ comme fonction test dans l'équation (III.4.1). On utilise l'hypothèse (III.1.2) sur la mobilité B ($B_1 \leq B$) pour écrire directement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \alpha^4 B_1 |\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq \alpha^2 |b(v, \varphi_1, \Delta\varphi)| + \alpha^2 |b(v_2, \varphi, \Delta\varphi)|$$
$$+ \alpha^4 |B'|_\infty \int_\Omega |\varphi||\nabla\Delta\varphi_1||\nabla\Delta\varphi| + \alpha^2 |(BF'')'|_\infty \int_\Omega |\varphi||\nabla\varphi_1||\nabla\Delta\varphi| + |BF''|_\infty \int_\Omega |\nabla\varphi||\nabla\Delta\varphi|.$$

L'inégalité de Hölder permet alors d'obtenir :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \alpha^4 B_1 |\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq \alpha^2 |v|_2 |\nabla\varphi_1|_6 |\Delta\varphi|_3 + \alpha^2 |v_2|_6 |\nabla\varphi|_2 |\Delta\varphi|_3$$
$$+ \alpha^4 |B'|_\infty |\varphi|_\infty |\nabla\Delta\varphi_1|_2 |\nabla\Delta\varphi|_2 + \alpha^2 |(BF'')'|_\infty |\varphi|_3 |\nabla\varphi_1|_6 |\nabla\Delta\varphi|_2 + |BF''|_\infty |\nabla\varphi|_2 |\nabla\Delta\varphi|_2.$$

La borne R sur les solutions impliquent l'existence d'une constante C telle que l'on puisse majorer le second terme de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \alpha^4 B_1 |\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C\big(\overbrace{|v|_2|\Delta\varphi|_3}^{U_1} + \overbrace{|\nabla\varphi|_2|\Delta\varphi|_3}^{U_2}$$
$$+ \underbrace{|\varphi|_\infty|\nabla\Delta\varphi_1|_2|\nabla\Delta\varphi|_2}_{U_3} + \underbrace{|\varphi|_3|\nabla\Delta\varphi|_2}_{U_4} + \underbrace{|\nabla\varphi|_2|\nabla\Delta\varphi|_2}_{U_4}\big).$$

Dans les deux premiers termes U_1 et U_2, on peut utiliser les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5) :

$$|\Delta\varphi|_3 \leq C(|\Delta\varphi|_2 + |\Delta\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2}), \quad \text{avec } |\Delta\varphi|_2 \leq |\nabla\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2},$$
$$|\Delta\varphi|_3 \leq C(|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |\nabla\varphi|_2^{1/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4}),$$

et donc, on a

$$U_1 \leq |v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4},$$
$$U_2 \leq |\nabla\varphi|_2^{3/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |\nabla\varphi|_2^{5/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4}.$$

Dans le troisième terme U_3, une intégration par parties donne directement

$$|\nabla\Delta\varphi_1|_2 \leq |\Delta\varphi_1|_2^{1/2}|\Delta^2\varphi_1|_2^{1/2} \leq \sqrt{R}\,|\Delta^2\varphi_1|_2^{1/2},$$

et successivement, l'inégalité de Agmon

$$|\varphi|_\infty \leq C\|\varphi\|_1^{1/2}\|\varphi\|_2^{1/2},$$

et le lemme III.2.3 (avec la propriété remarquable $m(\varphi) = m(\varphi_1) - m(\varphi_2) = 0$) donne :

$$|\varphi|_\infty \leq C|\nabla\varphi|_2^{3/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/4},$$

ce qui se résume à

$$U_3 \leq \sqrt{R}\,|\nabla\varphi|_2^{3/4}|\Delta^2\varphi_1|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{5/4}.$$

D'autres parts, on a :

$$|\varphi|_3 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi - m(\varphi)\|_1 \leq C|\nabla\varphi|_2,$$

ce qui montre que le terme U_4 est du même type que U_5. Finalement, ces estimations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \alpha^4 B_1|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq\ & C(|v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4}\\ &+ |\nabla\varphi|_2^{3/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |\nabla\varphi|_2^{5/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4}\\ &+ |\nabla\varphi|_2^{3/4}|\Delta^2\varphi_1|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{5/4} + |\nabla\varphi|_2|\nabla\Delta\varphi|_2).\end{aligned}$$

L'inégalité de Young permet de réduire cette estimation d'énergie à la suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \frac{\alpha^4 B_1}{2}|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2) + C|\Delta^2\varphi_1|_2^{4/3}|\nabla\varphi|_2^2. \tag{III.4.4}$$

4.2 Estimation de la différence $v_1 - v_2$

De la même façon, prenons $w = v$ comme une fonction test dans (III.4.2). En employant l'hypothèse sur η, le fait que $b(v_2, v, v) = 0$ (lemme III.2.2) et l'inégalité de Korn (lemme III.2.7) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|v|_2^2}{2}\right) + \eta_1|\nabla v|_2^2 \leq |b(v, v_1, v)| + \int_\Omega |\sigma||\nabla v| + 2|\eta'|_\infty \int_\Omega |\varphi||D(v_1)||D(v)|\\ + \alpha^2|b(v, \varphi_1, \Delta\varphi)| + \alpha^2|b(v, \varphi, \Delta\varphi_2)|.\end{aligned}$$

Puis utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (propriété III.2.3) on peut obtenir la majoration :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|v|_2^2}{2}\right) + \eta_1|\nabla v|_2^2 \leq |v|_6|\nabla v_1|_2|v|_3 + |\sigma|_2|\nabla v|_2 + 2|\eta'|_\infty|\nabla v_1|_2|\varphi|_\infty|\nabla v|_2\\ + \alpha^2|\nabla\varphi_1|_6|v|_2|\Delta\varphi|_3 + \alpha^2|\Delta\varphi_2|_2|v|_2|\nabla\varphi|_\infty.\end{aligned}$$

Comme dans la partie précédente, on commence par réduire cette équation en majorant les solutions φ_i et v_i par la constante R. Les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5) vont permettre de majorer les normes L^p restantes à l'aide de norme H^s. Par exemple le terme $|v|_6|v|_3$ se décompose ainsi :

$$|v|_6|v|_3 \leq C(|v|_2^2 + |v|_2|\nabla v|_2 + |v|_2^{3/2}|\nabla v|_2^{1/2} + |v|_2^{1/2}|\nabla v|_2^{3/2}).$$

Le lemme III.2.3 avec la relation $m(\varphi) = 0$ permet alors d'écrire l'inégalité :

$$|\nabla\varphi|_\infty \leq C|\nabla\Delta\varphi|_2.$$

Alors en suivant les même techniques présentées dans l'estimation de φ, on peut en déduire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|v|_2^2}{2}\right) + \eta_1|\nabla v|_2^2 \leq\ & C(|v|_2^2 + |v|_2|\nabla v|_2 + |v|_2^{3/2}|\nabla v|_2^{1/2} \\ & + |v|_2^{1/2}|\nabla v|_2^{3/2} + |\sigma|_2|\nabla v|_2 + |\nabla\varphi|_2^{3/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/4}|\nabla v|_2 \\ & + |v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\nabla\Delta\varphi|_2^{1/2} + |v|_2|\nabla\varphi|_2^{1/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{3/4} + |v|_2|\nabla\Delta\varphi|_2).\end{aligned}$$

A nouveau à l'aide de l'inégalité de Young, on a

$$\frac{d}{dt}\left(|v|_2^2\right) + \eta_1|\nabla v|_2^2 \leq C(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\sigma|_2^2) + \frac{\alpha^4 B_1}{2}|\nabla\Delta\varphi|_2^2. \tag{III.4.5}$$

4.3 Estimation de la différence $\boldsymbol{\sigma_1 - \sigma_2}$

Pour cette estimation, substituons σ à τ dans (III.4.3), on arrive assez rapidement à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma|_2^2}{2}\right) + l_1|\sigma|_2^2 + \varepsilon|\nabla\sigma|_2^2 \leq\ & |\underline{b}(v,\sigma_1,\sigma)| + \left|\int_\Omega (g_a(\sigma,v_1) + g_a(\sigma_2,v)) : \sigma\right| \\ & + |(f\eta)'|_\infty \int_\Omega |\varphi||D(v_1)||\sigma| + f_2\eta_2\int_\Omega |D(v)||\sigma| + |l'|_\infty \int_\Omega |\varphi||\sigma_1||\sigma|.\end{aligned}$$

Les termes qui vont sans doute nous poser le plus de problèmes sont les termes trilinéaires du type $(g_a(\sigma,v),\sigma)$. Nous sommes ici dans le cas général, donc $a \in [-1;1]$ et on peut, comme dans la preuve du lemme III.2.1, montrer assez facilement les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega g_a(\sigma,v_1) : \sigma = 2a\int_\Omega Tr(\nabla v_1.\sigma.\sigma), \\ &\int_\Omega g_a(\sigma_2,v) : \sigma = (a+1)\int_\Omega Tr(\nabla v.\sigma_2.\sigma) + (a-1)\int_\Omega Tr(\nabla v.\sigma.\sigma_2).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'utiliser à bon escient l'inégalité de Hölder (propriété III.2.3) aussi bien dans ces termes que dans les autres :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma|_2^2}{2}\right) + \varepsilon|\nabla\sigma|_2^2 \leq\ & |v|_6|\nabla\sigma_1|_2|\sigma|_3 \\ & + 2|a||\nabla v_1|_2|\sigma|_6|\sigma|_3 \\ & + |a+1||\nabla v|_2|\sigma_2|_6|\sigma|_3 + |a-1||\nabla v|_2|\sigma|_3|\sigma_2|_6 \\ & + |(f\eta)'|_\infty|\varphi|_3|\nabla v_1|_2|\sigma|_6 + |l'|_\infty|\varphi|_3|\sigma_1|_2|\sigma|_6 \\ & + f_2\eta_2|\nabla v|_2|\sigma|_2.\end{aligned}$$

A partir d'ici, la technique est la même que celle appliquée pour avoir des estimations sur φ ou sur v. On utilise les lemmes de Sobolev et la borne R liée aux solutions de sorte que l'on peut écrire (chaque terme étant traité l'un après l'autre en respectant l'ordre de l'estimation précédente) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma|_2^2}{2}\right)+\varepsilon|\nabla\sigma|_2^2 \leq\ & C(|v|_2|\sigma|_2+|v|_2|\sigma|_2^{1/2}|\nabla\sigma|_2^{1/2}+|\nabla v|_2|\sigma|_2+|\nabla v|_2|\sigma|_2^{1/2}|\nabla\sigma|_2^{1/2}\\ &+|\sigma|_2^2+|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2+|\sigma|_2^{3/2}|\nabla\sigma|_2^{1/2}+|\sigma|_2^{1/2}|\nabla\sigma|_2^{3/2}\\ &+|\nabla v|_2|\sigma|_2+|\nabla v|_2|\nabla\sigma|_2^{1/2}|\sigma|_2^{1/2}\\ &+|\varphi|_2|\sigma|_2+|\varphi|_2|\sigma|_2^{1/2}|\nabla\sigma|_2^{1/2}+|\nabla\varphi|_2|\sigma|_2+|\nabla\varphi|_2|\sigma|_2^{1/2}|\nabla\sigma|_2^{1/2}\\ &+|\nabla v|_2|\sigma|_2).\end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité de Young permet à la fois d'absorber tous les terme de type $|\nabla\sigma|_2$ par $\varepsilon|\nabla\sigma|_2^2$, et d'imposer aux quantités $|\nabla v|_2^2$ de ne pas être trop “nombreuses” :

$$\frac{d}{dt}\left(|\sigma|_2^2\right)+\varepsilon|\nabla\sigma|_2^2 \leq \frac{C}{\varepsilon}(|v|_2^2+|\nabla\varphi|_2^2+|\sigma|_2^2)+\frac{\eta_1}{2}|\nabla v|_2^2. \tag{III.4.6}$$

4.4 Conclusion

Pour conclure, il suffit d'ajouter les estimations (III.4.4), (III.4.5) et (III.4.6) afin d'obtenir une inégalité du type

$$y'(t) \leq h(t)y(t),$$

où

$$y(t)=|v|_2^2+\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2+|\sigma|_2^2 \quad \text{et} \quad h(t)=C+C|\Delta^2\varphi_1|_2^{4/3}.$$

En remarquant que l'application h est intégrable sur $[0;T]$ (car la solution φ_1 vérifie $\Delta^2\varphi_1 \in L^2(\Phi_0)$), on peut appliquer le lemme de Gronwall. La condition initiale étant nulle ($y(0) = 0$), la quantité y restera nulle pour tout temps, ce qui prouve l'unicité.

5 Le cas particulier $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où le coefficient rhéologique a est nul. Le résultat (voir le théorème III.1.2) montre que l'on a besoin de moins de régularité sur les conditions initiales afin d'obtenir un résultat d'existence. La raison pour laquelle il ne faut pas “monter” si haut en régularité pour trouver des solutions réside dans le fait que les termes quadratiques de l'équation constitutive en σ s'annulent (voir le lemme III.2.1). Ce modèle pour l'évolution du tenseur des contraintes (c'est à dire lorsque a est nul) a été étudié dans le cas monophasique par P.L. Lions et N. Masmoudi [58].

5.1 Estimations *a priori*

En fait, il suffit de reprendre ce qui a été fait au début de la preuve du théorème III.1.1. On avait remarqué que les premières estimations n'étaient pas suffissantes car un terme du type $a^2\|\sigma_n\|_1^4$ apparaissait dans les membres de droite alors que l'on ne contrôlait que $\|\sigma_n\|_1^2$ (voir (III.3.10)). Cette fois çi, le coefficient a étant nul, le problème n'a plus lieu d'être. On a les mêmes estimations pour (III.3.8), (III.3.9) alors que (III.3.10) devient maintenant :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\sigma_n|_2^2}{2}\right)+\varepsilon|\nabla\sigma_n|_2^2 \leq \frac{\eta_1}{4}|\nabla u_n|_2^2+C|\sigma_n|_2^2+C. \tag{III.5.1}$$

Ainsi, en additionnant les résultats (III.3.8), (III.3.9), (III.5.1) on déduit (en utilisant l'inégalité de Poincaré, lemme III.2.8) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi_n|_2^2+\int_\Omega F(\varphi_n)+\frac{|u_n|_2^2}{2}+\frac{|\sigma_n|_2^2}{2}\right)+\left(\frac{B_1}{2}|\nabla\mu_n|_2^2+\frac{\eta_1}{2}|\nabla u_n|_2^2+\varepsilon|\nabla\sigma_n|_2^2\right)\leq\ C|\sigma_n|_2^2+C. \tag{III.5.2}$$

Dans ce cas, on peut écrire

$$y'(t)\leq\gamma y(t)+\beta,\quad \gamma>0,\quad \beta>0,$$

où $y(t)=\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi_n|_2^2+\int_\Omega F(\varphi_n)+\frac{1}{2}|u_n|_2^2+\frac{1}{2}|\sigma_n|_2^2$. Cette estimation montre que les suites $\{\varphi_n\}$, $\{v_n\}$ et $\{\sigma_n\}$ sont bornées pour n'importe quel temps $T>0$, respectivement dans

$$\begin{aligned}&L^\infty(0,T;\Phi_1) \text{ pour } \{\varphi_n\},\\ &L^\infty(0,T;V_0) \text{ pour } \{v_n\},\\ &L^\infty(0,T;\Sigma_0) \text{ pour } \{\sigma_n\}.\end{aligned}$$

En utilisant ces bornes puis en intégrant en temps l'inégalité (III.5.2), on en déduit que

$$\begin{aligned}&\{\mu_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Phi_1),\\ &\{v_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_1),\\ &\{\sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_1).\end{aligned}$$

On doit maintenant, comme lors de la preuve du premier théorème, obtenir des bornes sur les dérivées en temps (ceci afin d'obtenir de la convergence forte pour passer à la limite dans les termes non linéaires). Le travail qui a déjà été fait sur les dérivées (partie 3.4) n'est plus valable maintenant car il supposait plus de régularité sur les suites $\{\varphi_n\}$, $\{v_n\}$ et $\{\sigma_n\}$ que l'on en dispose à présent. Dans le cas étudié actuellement, pour avoir de bonnes évaluations sur les dérivées, on va être obligé de prouver que $\{\varphi_n\}$ est bornée dans $L^2(0,T;\Phi_3)$. Ce résultat peut être obtenu en utilisant l'hypothèse (III.1.7) supplémentaire. En effet, la définition du potentiel μ_n conduit à

$$\alpha^4|\nabla\Delta\varphi_n|_2^2\leq 2|\nabla\mu_n|_2^2+2|\nabla F'(\varphi_n)|_2^2.$$

On vient de voir que la suite $\{|\nabla\mu_n|_2^2\}$ est bornée. De plus, concernant le dernier terme, puisque q satisfait (III.1.7), les injections $H^1\subset L^6$ et $H^1\subset L^{3q-3}$ sont vraies à la fois dans le cas tridimensionnel et dans le cas bidimensionnel. On en déduit :

$$\begin{aligned}|\nabla F'(\varphi_n)|_2^2&\leq C\int_\Omega(1+|\varphi_n|^{2q-2})|\nabla\varphi_n|^2\\ &\leq C|\nabla\varphi_n|_2^2+C|\varphi_n|_{3q-3}^{2q-2}|\nabla\varphi_n|_6^2\\ &\leq C|\nabla\varphi_n|_2^2+C|\nabla\varphi_n|_2^{2q-2}|\Delta\varphi_n|_2^2,\end{aligned}$$

et on a finalement que :

$$\{\varphi_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Phi_3).$$

5.2 Estimations des dérivées

Dérivée du paramètre d'ordre : On peut alors montrer que si φ_n et v_n sont moins réguliers que dans la partie 3.4 alors on a des estimations de la dérivée $\partial_t\varphi_n$ seulement dans $L^2(0,T;\Phi_{-1})$. En effet, supposons que

$$\begin{cases}\{\varphi_n\} \text{ soit bornée dans } L^2(0,T;\Phi_3)\cap L^\infty(0,T;\Phi_1),\\ \{v_n\} \text{ soit bornée dans } L^2(0,T;V_1).\end{cases}$$

On peut écrire, puisque $H^1 \subset L^4$,

$$\|\operatorname{div}(\varphi_n v_n)\|_{-1} \leq |\varphi_n|_4 |v_n|_4 \leq C\|\varphi_n\|_1 \|v_n\|_1.$$

De la même manière, en utilisant cette fois ci l'hypothèse de non dégénérescence de la mobilité B (hypothèse (III.1.2)),

$$\|\operatorname{div}(B(\varphi_n)\nabla\mu_n)\|_{-1} \leq B_2|\nabla\mu_n|_2 \leq B_2\|\varphi_n\|_3.$$

Comme dans la partie 3.4, on isole la dérivée $\partial_t\varphi_n$ à l'aide de l'équation (III.3.4) et du projecteur $P^*_{\Psi_n}$ (qui est de norme inférieure à 1) et ainsi, les deux estimations précédentes montrent que

$$\left\|\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\right\|_{-1} \leq C\|\varphi_n\|_1\|v_n\|_1 + B_2\|\varphi_n\|_3.$$

En intégrant en temps le carré de cette estimation (utiliser $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$) on en déduit

$$\left\|\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;\Phi_{-1})} \leq 2C^2\|\varphi_n\|^2_{L^\infty(0,T;\Phi_1)}\|v_n\|^2_{L^2(0,T;V_1)} + 2B_2^2\|\varphi_n\|^2_{L^2(0,T;\Phi_3)}. \tag{III.5.3}$$

Dérivée de la vitesse : De même, pour l'estimation de $\partial_t v_n$, on prouve ici un résultat comparable à (III.3.15) dans lequel on a moins de régularité. On suppose seulement que

$$\begin{cases} \{\varphi_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\mathit{\Phi}_3) \cap L^\infty(0,T;\mathit{\Phi}_1), \\ \{v_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_1) \cap L^\infty(0,T;V_0), \\ \{\sigma_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_0), \end{cases}$$

et on obtient clairement les bornes suivantes, l'opérateur $E(\varphi, v) = 2\int_\Omega \eta(\varphi)D(v) : D(.)$ ayant été introduit dans la partie 3.4 :

$$\|E(\varphi_n, v_n)\|_{-1} \leq 2\eta_2\|v_n\|_1,$$

$$\|\operatorname{div}(\sigma_n)\|_{-1} \leq |\sigma_n|_2,$$

$$\|\varphi_n\nabla\mu_n\|_{-1} \leq C|\varphi_n|_4|\nabla\mu_n|_2 \leq C\|\varphi_n\|_1\|\varphi_n\|_3.$$

On sait (d'après le lemme III.2.2) que pour $w \in V_{d/2}$, on a

$$|b(v_n, v_n, w)|_2 \leq C|v_n|_2^{1/2}\|v_n\|_1^{1/2}|v_n|_2^{1/2}\|v_n\|_1^{1/2}\|w\|_{d/2}.$$

Ceci permet donc d'estimer l'opérateur $B(v,v) = b(v,v,.)$ dans $H^{-d/2}$:

$$\|B(v_n, v_n)\|_{-d/2} \leq C|v_n|_2\|v_n\|_1.$$

On utilise alors l'injection $H^{-1} \subset H^{-d/2}$, ce qui permet d'écrire

$$\left\|\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\|_{-d/2} \leq 2\eta_2\|v_n\|_1 + C|\sigma_n|_2 + C\|\varphi_n\|_1\|\varphi_n\|_3 + C|v_n|_2\|v_n\|_1. \tag{III.5.4}$$

Dérivée du tenseur des contraintes : Finalement, pour $\partial_t\sigma_n$ on a un résultat similaire : supposons que

$$\begin{cases} \{v_n\} \text{ soit bornée dans } L^2(0,T;V_1), \\ \{\sigma_n\} \text{ soit bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_1). \end{cases}$$

Les hypothèses sur les fonctions l et ν (qui sont bornées) permettent d'avoir directement

$$\|l(\varphi_n)\sigma_n\|_{-1} \le C|\sigma_n|_2,$$

$$\|\Delta\sigma_n\|_{-1} \le \|\sigma_n\|_1,$$

$$\|\nu(\varphi_n)D(v_n)\|_{-1} \le C\|v_n\|_1.$$

Pour simplifier la suite, fixons un réel $s > d/2 + 1$. Les inégalités de Sobolev permettent d'affirmer que, si $\tau \in \Sigma_s$ alors $\nabla\tau \in \Sigma_{s-1} \subset L^\infty$. Cette régularité va nous être utile à deux reprises, d'un part

$$(\operatorname{div}(\sigma_n v_n), \tau) \le |\sigma_n|_2 |v_n|_2 |\nabla\tau|_\infty, \quad \text{pour tout } \tau \in \Sigma_s,$$

ce qui implique

$$\|\operatorname{div}(\sigma_n v_n)\|_{-s} \le |\sigma_n|_2 |v_n|_2,$$

et d'autre part,

$$(g_a(\sigma_n, v_n), \tau) \le C|\nabla v_n|_2 |\sigma_n|_2 |\tau|_\infty \le C|\nabla v_n|_2 |\sigma_n|_2 \|\tau\|_s, \quad \text{pour tout } \tau \in \Sigma_s,$$

ce qui implique là aussi

$$\|g_a(\sigma_n, v_n)\|_{-s} \le C\|v_n\|_1 |\sigma_n|_2.$$

En utilisant finalement $H^{-1} \subset H^{-s}$ (puisque $s \ge 1$) on peut estimer la dérivée $\partial_t\sigma_n$ dans H^{-s} :

$$\left\|\frac{\partial\sigma_n}{\partial t}\right\|_{-s} \le C(|\sigma_n|_2|v_n|_2 + \|v_n\|_1|\sigma_n|_2 + |\sigma_n|_2 + \varepsilon\|\sigma_n\|_1 + \|v_n\|_1).$$

Et enfin, comme dans le cas de la dérivée en vitesse, on intégre en temps :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\sigma_n}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;\Sigma_{-s})} \le C\Big(&|\sigma_n|^2_{L^\infty(0,T;\Sigma_0)}|v_n|^2_{L^2(0,T;V_0)} + \|v_n\|^2_{L^2(0,T;V_1)}|\sigma_n|^2_{L^\infty(0,T;\Sigma_0)} \\ &+ |\sigma_n|^2_{L^2(0,T;\Sigma_0)} + \|\sigma_n\|^2_{L^2(0,T;\Sigma_1)} + \|v_n\|^2_{L^2(0,T;V_1)}\Big).\end{aligned} \tag{III.5.5}$$

5.3 Passage à la limite

Il ne reste plus qu'à regrouper toutes les estimations obtenues : les inégalités (III.5.3), (III.5.4) et (III.5.5) permettant d'avoir des bornes sur les dérivées :

$$\left\{\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Phi_{-1}),$$

$$\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V_{-d/2}),$$

$$\left\{\frac{\partial\sigma_n}{\partial t}\right\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;\Sigma_{-s}).$$

Comme précédemment (dans la partie 3.5), le lemme III.2.10 permet de terminer la preuve dans le cas $a = 0$. En particulier, le dernier point du lemme III.2.10 assure les convergences suivantes :

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ dans } C^0([0,T[;\Phi_1) \text{ faiblement},$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ dans } C^0([0,T[;V_{(2-d)/4}) \text{ faiblement},$$

$$\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ dans } C^0([0,T[;\Sigma_{(1-s)/2}) \text{ faiblement}.$$

Remarque III.5.1
Les démonstrations que l'on vient d'exposer sont du même type que celles faites par F. Boyer dans [11] concernant des mélanges diphasiques newtoniens. Les techniques permettant d'avoir de tels résultats dans les cas monophasiques visco-élastiques sont souvent assez différentes. Néanmoins, la preuve du théorème III.1.2 "dégénère" bien dans le cas où l'on a un seul fluide (c'est à dire lorsque φ est constante égale à 1 ou -1). En effet, on peut obtenir facilement une borne uniforme en temps. Si on reprend les démonstrations, on remarque que le seul obstacle à cette borne uniforme est le fait que l'inéquation d'énergie est du type

$$y' + \gamma_1 y \leq \gamma_2 y + \beta.$$

Le terme $\gamma_2 y$ est issu des termes $\int_\Omega \sigma : \nabla u$ (dans l'estimation L^2 pour u) et $\int_\Omega \nu(\varphi)\sigma : \nabla u$ (dans l'estimation L^2 pour σ). Lorsque φ est constante, une combinaison linéaire des deux estimations (celle pour $|u|_2$ et celle pour $|\sigma|_2$) permet de compenser ces deux termes et d'avoir l'estimation d'énergie suivante :

$$y' + \gamma_1 y \leq \beta.$$

On retrouve alors les résultats du type de ceux énoncés dans [58].

Preuve du corollaire

La preuve de ce corollaire se résume en deux points : premièrement en dimension deux, les injections de Sobolev permettent d'avoir de meilleures estimations (le cas de la dimension 3 n'est pas envisageable étant donné la méconnaissance de l'existence forte globale au seul problème de Navier-Stokes !), deuxièmement lorsque $a = 0$, on a déjà obtenu une solution faible globale.

Reprenons donc les estimations effectuées dans la preuve du théorème III.1.1. Le fait que l'on soit dans le cas bidimensionnel permet d'obtenir de meilleures estimations. Tout d'abord, dans l'estimation H^2 pour φ (voir la partie 3.3) on peut se servir de deux résultats dus a F. Boyer basés sur le fait que $H^{1+\delta} \subset L^\infty$ pour tout $\delta > 0$ (en dimension deux seulement, néanmoins en dimension trois cette première difficulté peut être contournée, voir [8]) :

$$\begin{aligned}
|\Delta(F'(\varphi))|_2 |\Delta^2\varphi|_2 &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{4} |\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^{4/3}(1 + |\nabla\varphi|_2^{\alpha_1}), \quad \alpha_1 > 0,\\
|\nabla\varphi\nabla\mu|_2 |\Delta^2\varphi|_2 &\leq \frac{\alpha^2 B_1}{4} |\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2|\Delta\varphi|_2^2|\nabla\mu|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2 + C|\Delta\varphi|_2^2|\nabla\mu|_2^2.
\end{aligned}$$

L'estimation (III.3.11) s'écrit alors plus simplement :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \frac{\alpha^2 B_1}{2}|\Delta^2\varphi|_2^2 \leq & C|\nabla\varphi|_2^{4/3}(1 + |\nabla\varphi|_2^{\alpha_1}) + C|\nabla\varphi|_2^2|\Delta\varphi|_2^2\nabla\mu|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2\\
& + C|\Delta\varphi|_2^2\nabla\mu|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2|u|_2^4 + C.
\end{aligned} \tag{III.5.6}$$

Pour l'estimation de u dans H^1 (voir la partie 3.3), comme pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, le terme qui pose problème est le terme quadratique $b(u, u, Au)$ qui en dimension deux peut se majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
|b(u, u, Au)| &\leq C|u|_4|\nabla u|_4|Au|_2,\\
&\leq C(|u|_2 + |u|_2^{1/2}|\nabla u|_2^{1/2})(|\nabla u|_2 + |\nabla u|_2^{1/2}|\Delta u|_2^{1/2})|Au|_2,\\
&\leq \frac{\eta_1}{18}|Au|_2^2 + C|u|_2^2|\nabla u|_2^2 + C|u|_2|\nabla u|_2^3 + C|u|_2^4|\nabla u|_2^2 + C|u|_2^2|\nabla u|_2^4.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'estimation (III.3.12) devient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|_2^2}{2}\right)+\frac{\eta_1}{2}|Au|_2^2 \leq & \frac{\alpha^2 B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+C|u|_2^2|\nabla u|_2^2+C|u|_2|\nabla u|_2^3\\ &+C|u|_2^4|\nabla u|_2^2+C|u|_2^2|\nabla u|_2^4+C|\nabla\varphi|_2^2+C|\nabla u|_2^2\\ &+C|\nabla\varphi|_2^2|\nabla u|_2^4+C|\nabla\sigma|_2^2+C|\nabla\varphi|_2^2|\Delta\varphi|_2^4+C.\end{aligned} \tag{III.5.7}$$

Et pour l'estimation H^1 de σ, on reprend les calculs fait dans la partie 3.3 de ce même chapitre. Dans le cas où $a=0$, ils s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla \sigma|_2^2}{2}\right)+\varepsilon|\Delta\sigma|_2^2 \leq & |l'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2+|u|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2+|h_\delta|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2\\ &+|(\nabla u.\sigma,\Delta\sigma)|+|(\sigma\cdot\nabla u,\Delta\sigma)|+|(\nabla h_\delta.\sigma,\Delta\sigma)|+|(\sigma\cdot\nabla h_\delta,\Delta\sigma)|\\ &+f_2\eta_2|\nabla u|_2|\Delta\sigma|_2+f_2\eta_2|\nabla h_\delta|_2|\Delta\sigma|_2.\end{aligned}$$

On contrôle les termes du type $|(\sigma\cdot\nabla u,\Delta\sigma)|$ par la quantité $|\sigma|_4|\nabla u|_4|\Delta\sigma|_2$ afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla \sigma|_2^2}{2}\right)+\varepsilon|\Delta\sigma|_2^2 \leq\ & |l'|_\infty|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2+|u|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2+|h_\delta|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2\\ &+C|\nabla u|_4|\sigma|_4|\Delta\sigma|_2+C|\nabla h_\delta|_4|\sigma|_4|\Delta\sigma|_2+f_2\eta_2|\nabla u|_2|\Delta\sigma|_2+f_2\eta_2|\nabla h_\delta|_2|\Delta\sigma|_2.\end{aligned}$$

Pour traiter le premier terme, on utilise le lemme III.2.4, ainsi que l'inégalité de Young à deux reprises :

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi|_\infty|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2 \leq\ & C\,|\nabla\varphi|_2^{1/2}|\Delta^2\varphi|_2^{1/2}|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2\\ \leq\ & \frac{\alpha^2B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+C\,|\nabla\varphi|_2^{2/3}|\sigma|_2^{4/3}|\nabla\sigma|_2^{4/3}\\ \leq\ & \frac{\alpha^2B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+C\,|\nabla\varphi|_2^2+C\,|\sigma|_2^2|\nabla\sigma|_2^2.\end{aligned}$$

Pour ce qui est des autres termes, les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5) et celle de Young permettent d'arriver finalement à une expression du type (les termes étant ordonnés comme dans l'estimation précédente) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla \sigma|_2^2}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}|\Delta\sigma|_2^2 \leq & C(|\nabla\varphi|_2^2+|\sigma|_2^2|\nabla\sigma|_2^2+|u|_2\|u\|_1(1+|u|_2\|u\|_1)|\nabla\sigma|_2^2\\ &+|\nabla\sigma|_2^2+|\sigma|_2\|\sigma\|_1(1+|\sigma|_2\|\sigma\|_1)|\nabla u|_2^2\\ &+|\sigma|_2^2+|\sigma|_2|\nabla\sigma|_2+|\nabla u|_2^2+1)+\frac{\alpha^2B_1}{8}|\Delta^2\varphi|_2^2+\frac{\eta_1}{4}|Au|_2^2.\end{aligned} \tag{III.5.8}$$

Par exemple, le second terme a été majoré ainsi :

$$\begin{aligned}|u|_4|\nabla\sigma|_4|\Delta\sigma|_2 \leq & C\,|u|_4(|\nabla\sigma|_2+|\nabla\sigma|_2^{1/2}|\Delta\sigma|_2^{1/2})|\Delta\sigma|_2\\ \leq & \frac{\varepsilon}{12}|\Delta\sigma|_2^2+C\,|u|_4^2|\nabla\sigma|_2^2+C\,|u|_4^4|\nabla\sigma|_2^2\\ \leq & \frac{\varepsilon}{12}|\Delta\sigma|_2^2+C\,|u|_2\|u\|_1(1+|u|_2\|u\|_1)|\nabla\sigma|_2^2.\end{aligned}$$

Remarquons que cette dernière estimation serait encore valable dans le cas général (dimension 3 et $a\neq 0$). L'estimation que l'on avait trouvée dans la partie 3.3 n'était donc pas optimale, mais elle était suffisante pour avoir des solutions locales.

Finalement, en ajoutant les équations (III.5.6), (III.5.7) et (III.5.8) on obtient une estimation du type

$$z'(t) + \alpha^2 B_1 |\Delta^2 \varphi|_2^2 + \eta_1 |\Delta v|_2^2 + \varepsilon |\Delta \sigma|_2^2 \leq g(t) + h(t) z(t),$$

où l'on a posé $z = |\Delta \varphi|_2^2 + |\nabla u|_2^2 + |\nabla \sigma|_2^2$.

On n'a volontairement pas détaillé les expressions de g et h mais on peut remarquer qu'avec les résultats obtenus sur les solutions faibles (voir le théorème III.1.2), ces deux fonctions demeurent dans $L^1_{loc}(0,T)$. Avec le lemme de Gronwall, il est maintenant direct de déduire l'existence globale de solution forte dans le cas bidimensionnel, ce qui conclut la preuve.

Chapitre 4

Résultats sans le terme diffusif en contrainte

Comme on l'a expliqué dans l'introduction de la seconde partie, le système tel qu'il a été étudié dans le chapitre précédent n'est pas celui qui est attendu pour des modèles de fluides visco-élastiques. Habituellement, le modèle d'Oldroyd ne suppose pas qu'il existe de la diffusion en contrainte. C'est dans ce cadre plus classique que l'on va maintenant obtenir des résultats. Plus précisement, on présente des résultats d'existence (et unicité) de solution forte locale en temps (globale pour des données petites) pour les mélanges de fluides non newtoniens de type Oldroyd en dimension 3.

1 Notations, hypothèses et énoncés des résultats

1.1 Notations

Avant de se lancer dans les calculs et les estimations, rappelons le modèle considéré. On se place sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2;3\}$ dont le bord est noté Γ et la normale extérieure n. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v - 2\,\mathrm{div}\,(\eta(\varphi)D(v)) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma = -\alpha^2\Delta\varphi\nabla\varphi, \\ \mathrm{div}\, v = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + v\cdot\nabla\varphi - \mathrm{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = 0, \\ \mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi), \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + v\cdot\nabla\sigma + g_a(\sigma, v) + l(\varphi)\sigma = \nu(\varphi)D(v), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad v(0) = v_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \left.\dfrac{\partial\mu}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{\Gamma} = h \quad \text{avec } h\cdot n = 0, \end{cases} \tag{IV.1.1}$$

où l'application g_a est définie comme une application bilinéaire à valeurs dans l'ensemble des 2-tenseurs :

$$\begin{array}{rccc} g_a : & \{\text{2-tenseur}\} \times \{\text{1-tenseur}\} & \longrightarrow & \{\text{2-tenseur}\} \\ & (\,\sigma\,,\,v\,) & \longmapsto & -W(v)\cdot\sigma + \sigma\cdot W(v) + a(D(v)\cdot\sigma + \sigma\cdot D(v)). \end{array}$$

Comme au cours du chapitre précédent, on travaille avec des espaces prenant en compte les conditions aux bord du domaine :

$$\Phi = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ / \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = \frac{\partial \Delta\phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \Phi_s = \overline{\Phi}^{H^s} \text{ muni de la norme } \|.\|_s,$$

$$\mathcal{V} = \{ w \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ / \quad \operatorname{div} w = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0 \} \quad \text{et} \quad V_s = \overline{\mathcal{V}}^{H^s} \text{ muni de la norme } \|.\|_s \text{ pour } s \leq 3/2.$$

Pour $s' < 0$, les espaces $\Phi_{s'}$ et $V_{s'}$ désigneront les espaces duaux de $\Phi_{-s'}$ et $V_{-s'}$. On utilisera aussi la projection orthogonale $\mathbb{P}$ de L^2 sur V_0 et l'opérateur de Stokes $A = -\mathbb{P}\Delta$ de domaine $V_0 \cap H^2$.

1.2 Hypothèses

Concernant les hypothèses, ce sont globalement les mêmes que pour le chapitre précédent à ceci près que l'on doit supposer plus de régularité pour obtenir des résultats satisfaisants. Plus précisement, on supposera :

- La viscosité η, le paramètre de retard r et la mobilité B sont des fonctions régulières, positives et bornées. Plus généralement, on dira qu'une fonction f satisfait l'hypothèse (IV.1.2) si :

$$f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ à dérivées bornées et il existe } f_1, f_2 > 0 \text{ tels que } f_1 \leq f \leq f_2. \tag{IV.1.2}$$

- Concernant le potentiel de Cahn-Hilliard F, on fait les hypothèses suivantes :

$$F \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \tag{IV.1.3}$$

$$\begin{gathered} \text{il existe } F_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} |F''(x)| \leq F_0(1 + |x|^{p-1}), \\ |F^{(5)}(x)| \leq F_0(1 + |x|^q), \end{cases} \\ \text{où } \begin{cases} 1 \leq p \leq 3 \\ 0 \leq q < +\infty \end{cases} \text{si } d = 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq p < +\infty \text{ si } d = 2, \end{gathered} \tag{IV.1.4}$$

$$\begin{gathered} \forall \gamma \in \mathbb{R}, \ \exists \, F_1(\gamma) > 0, \exists \, F_2(\gamma) \geq 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (x - \gamma)F'(x) \geq F_1(\gamma)F(x) - F_2(x), \\ \exists \, F_3 \geq 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ F''(x) \geq -F_3. \end{gathered} \tag{IV.1.5}$$

- La dernière hypothèse, au sujet de la vitesse imposée au bord du domaine, peut s'écrire de la façon suivante :

$$h \in H^3(\Omega), \quad h.n = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \operatorname{div} h = 0. \tag{IV.1.6}$$

  En fait, cette vitesse peut être donnée seulement sur Γ mais on sait que si elle est y assez régulière, on peut la prolonger en un champ sur Ω, à divergence nulle. La régularité de ce prolongement dépend uniquement de la régularité sur le bord (voir la partie 1.3 du chapitre 3 ou [53]).

1.3 Résultats

Le premier résultat que l'on énonce est un résultat d'existence (et d'unicité) local de solution forte. Ce théorème est exactement le même résultat que celui obtenu par C. Guillopé et J.C. Saut dans [44] à ceci près que le fluide possède ici deux phases dont l'interface est gérée par une équation de type Cahn-Hilliard.

Théorème IV.1.1
Supposons $u_0 \in V_1 \cap H^2$, $\varphi_0 \in \varPhi_4$, $\sigma_0 \in H^2$, η, B, l *et* ν *satisfont* (IV.1.2), F *vérifie* (IV.1.3), (IV.1.4), (IV.1.5) *et* h *satisfait* (IV.1.6). *Alors il existe un temps* $T^* > 0$ *et une unique solution* $(u + h, \varphi, \sigma)$ *au problème* (IV.1.1) *tels que :*

$$u \in L^{\infty}(0, T^*; V_1 \cap H^2) \cap L^2(0, T^*; V_1 \cap H^3), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T^*; V_0) \cap L^2(0, T^*; V_1),$$

$$\varphi \in L^{\infty}(0, T^*; \varPhi_4) \cap L^2(0, T^*; \varPhi_6), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T^*; \varPhi_0) \cap L^2(0, T^*; \varPhi_2),$$

$$\sigma \in L^{\infty}(0, T^*; H^2), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T^*; H^1).$$

Ensuite, nous nous sommes intéressés sur l'existence globale en temps des solutions. Un tel résultat a été prouvé dans le cas de données petites. Pour ce qui est du paramètre d'ordre φ cette hypothèse de petitesse s'écrit "φ_0 est proche d'un point métastable ω" (c'est à dire proche d'un point où F est convexe, voir figure IV.1.1). On obtient

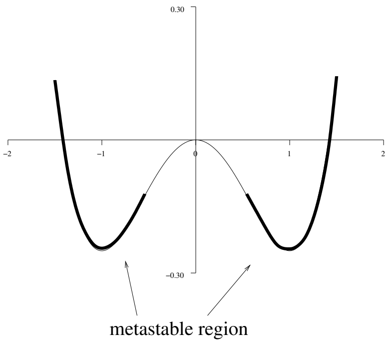


FIG. IV.1.1: Exemple d'un potentiel de Cahn-Hilliard avec ses zones métastables.

Théorème IV.1.2
Soit w un point métastable pour F. Sous les mêmes hypothèses que pour le précédent théorème, si en outre h, u_0, σ_0 et $\varphi_0 - \omega$ sont petits dans leur espace alors le résultat du théorème IV.1.1 est vrai sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $\|u\|_2$, $\|\sigma\|_2$ et $\|\varphi - \omega\|_3$ restent petits.

Remarque IV.1.1

- *Pour ce théorème, les hypothèses concernant la mobilité B et le potentiel F ne sont pas optimales. En effet, on peut seulement supposer que ces hypothèses sont vraies dans un voisinage de ω. En particulier, ce théorème est vrai dans le cas suivant (très usuel lors de considérations physiques) :*

$$B(x) = (1 - x^2)^r, \; r \geq 0,$$
$$F(x) = 1 - x^2 + \delta((1 + x)\mathit{log}(1 + x) + (1 - x)\mathit{log}(1 - x)),$$

  pour $\omega \in]-1; -\sqrt{1-\delta}[\cup]\sqrt{1-\delta}; 1[$.

- *Dans le cas d'une dérivée en rotation propre (dérivée de Jaumann, cas $a = 0$), le théorème III.1.2 ainsi que son corollaire sont encore valables dans le cadre de ce chapitre. Par contre on peut remarquer que dans la preuve du théorème III.1.2 lorsque $a \neq 0$, la présence du terme $\varepsilon\Delta\sigma$ est indispensable pour le contrôle des termes non linéaires du type $D(v) \cdot \sigma$.*

On termine ce chapitre en démontrant un résultat de régularité à tous ordres. Un tel résultat est prouvé seulement dans le cas monophasique, mais il est fort probable qu'une démonstration du même type (mais nettement plus difficile à comprendre !) fournirait un même résultat pour le modèle diphasique que l'on a étudié au début de cette partie.

On sait qu'un tel résultat nécessite des conditions de compatibilité. Celles-çi sont entièrement décrites dans la partie 5 (équation (IV.5.2)). Pour tout entier $k \geq 2$, on obtient alors :

Théorème IV.1.3
Si $u_0 \in H^k \cap V_1$ et $\sigma_0 \in H^k$ vérifient les relations de compatibilité (IV.5.2) *alors il existe $T^* > 0$ tel que le problème* (IV.1.1) *avec $\varphi = 1$ admette une solution (u, σ) vérifiant*

$$u \in L^\infty(0, T^*; H^k \cap V_1) \cap L^2(0, T^*; H^{k+1} \cap V_1) \quad \text{et} \quad \sigma \in L^\infty(0, T^*; H^k).$$

De plus, la solution satisfait les estimations sur les dérivées en temps suivantes :

$$\forall s \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq \frac{k}{2},\quad u^{(s)} \in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s}\cap V_0)\cap L^2(0,T^*;H^{k-2s+1}\cap V_0),$$
$$\forall s \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq \frac{k}{2},\quad \sigma^{(s)} \in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s+1}).$$

2 Existence locale d'une solution forte

Lors de la remarque IV.1.1, on a noté que la méthode utilisée dans la preuve du théorème III.1.2 (chapitre précédent) utilisait fortement la présence du terme diffusif $\varepsilon\Delta\sigma$. On va donc être obligé de changer de méthode. Pour cela, on s'est aidé de nombreux travaux qui ont été réalisé dans ce cadre "sans diffusion".

Dans [43, 44], C. Guillopé et J.C. Saut établissent l'existence d'une solution forte unique du système monophasique (c'est à dire lorsque $\varphi = \pm 1$), définie pour t au voisinage de 0 (et définie pour tout temps lorsque les données sont petites). Dans ce chapitre, on présente des versions diphasiques de ces résultats. Leur raisonnement est le suivant : on introduit un problème linéarisé, à l'aide de celui-ci on réécrit le système (IV.1.1) comme une équation de point fixe et puis on applique le théorème de Schauder dans un convexe compact approprié.

Notre démarche va être semblable, on réécrit le système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{v} = \widetilde{u} + h, \quad \widetilde{\eta} = \eta(\widetilde{\varphi}), \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta}D(u)) + \nabla p = -\alpha^2\Delta\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi} + \,\mathrm{div}\,\widetilde{\sigma} - \widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{v} + 2\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta}D(h)), \\[2mm] \mathrm{div}\, u = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \,\mathrm{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = \,\mathrm{div}\,(-\widetilde{\varphi}\,\widetilde{v}), \quad \mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi), \\[2mm] \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \widetilde{v}\cdot\nabla\sigma + g_a(\sigma,\widetilde{v}) + l(\widetilde{\varphi})\sigma = \nu(\widetilde{\varphi})D(\widetilde{v}), \\[2mm] \varphi(0) = \varphi_0, \quad u(0) = u_0 = v_0 - h, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial \mu}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

et il suffira de prouver que l'application, qui à la donnée $(\widetilde{u}+h,\widetilde{\varphi},\widetilde{\sigma})$ associe la solution $(u+h,\varphi,\sigma)$, admet un point fixe dans un espace bien choisit.

Dans un premier temps, on va prouver trois lemmes distincts. L'un considérant uniquement le problème de Navier-Stokes, un autre concernant le problème de Cahn-Hilliard et le dernier au sujet de la loi de type Oldroyd.

2.1 Problème de Stokes à viscosité variable

Pour ce premier lemme, on considére uniquement une équation de Stokes à viscosité variable. On étudie ici le cas homogène (vitesse nulle au bord du domaine) et le relèvement s'effectuera dans la partie "point fixe" (partie 2.4) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta}D(u)) + \nabla p = G_1, \\ \mathrm{div}\, u = 0, \\ u(0) = u_0, \quad u|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{IV.2.1}$$

Les hypothèses qui vont être introduites sur la viscosité $\widetilde{\eta}$ ainsi que sur le terme de source G_1 seront justifiées par la suite.

Lemme IV.2.1
Supposons que $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$, $\partial_t G_1 \in L^2(0,T;H^{-1})$, $G_1 \cdot \partial_t G_1 \in L^1(0,T;L^1)$, $G_1(0) \in L^2$, $\nabla\widetilde{\eta} \in L^\infty(0,T;H^2)$, $\partial_t\widetilde{\eta} \in L^2(0,T;L^\infty)$, $u_0 \in V_1 \cap H^2$ *et que* $\widetilde{\eta}$ *satisfait* $0 < \widetilde{\eta}_1 \leq \widetilde{\eta} \leq \widetilde{\eta}_2$.

Alors il existe une unique solution (u,p) *de* (IV.2.1) *telle que*

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;V_0)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;V_1)} \\ &\qquad \leq k_1\Bigg(\|u_0\|_2^2, \|G_1\|^2_{L^2(0,T;H^1)}, \left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})}, \|G_1\partial_t G_1\|_{L^1(0,T;L^1)}, \\ &\qquad\qquad |G_1(0)|_2^2, \|\nabla\widetilde{\eta}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}, \left\|\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^\infty)}\Bigg). \end{aligned}$$

Remarque IV.2.1

- *Il sera important pour la suite d'observer au cours de la preuve que la fonction* k_1 *est croissante en chaque variable. De plus, toutes les estimations seront indépendantes du temps* T.
- *L'hypothèse* $G_1(0) \in L^2$ *peut paraître superflue étant donné que l'on sait que si* $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$ *et* $\partial_t G_1 \in L^2(0,T;H^{-1})$ *alors* G_1 *est continue à valeurs dans* $[H^{-1}, H^1]_{1/2} = L^2$. *Néanmoins, cette estimation n'est pas indépendante de* T *et impliquerait donc une dépendance de* k_1 *par rapport au temps.*
- *Il est aussi intéressant de noter que* $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$ *et* $\partial_t G_1 \in L^2(0,T;H^{-1})$ *n'impliquent pas* $G_1 \cdot \partial_t G_1 \in L^1(0,T;L^1)$ *car le produit* $H^{-1} \times H^1$ *ne s'injecte pas dans* L^1.

2.1.1 Preuve du lemme IV.2.1

La preuve de ce lemme se fait en plusieurs étapes. Puisque la régularité demandée sur la vitesse est assez élevée, on ne va pas pouvoir obtenir des estimations directement aussi fortes. On va donc commencer par avoir des estimations plus faibles sur u ainsi que sur sa dérivée en temps, puis par régularité du problème de Stokes (voir par exemple [19]), on pourra “monter” en régularité.

• Estimation de u dans $L^\infty(0,T;V_1) \cap L^2(0,T;V_1 \cap H^2)$

On utilise la méthode d'approximation de Galerkin-Fadeo et on n'expose ici que les calculs formels. On multiplie l'équation de Stokes par Au où A est l'opérateur de Stokes (rappelons qu'il est défini pour tout $u \in V_2$ par $Au = -\Delta u + \nabla\pi \in V_0$). En développant $\mathrm{div}\,(\eta(\widetilde{\varphi})D(u))$, il vient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}.Au - \int_\Omega 2(\nabla\widetilde{\eta}.D(u)).Au - \int_\Omega \widetilde{\eta}\Delta u.Au = \int_\Omega G_1.Au.$$

Après intégrations par parties, $\widetilde{\eta}$ étant bornée, on a la majoration suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|_2^2}{2}\right) + \widetilde{\eta}_1|Au|_2^2 \leq \left|\int_\Omega G_1.Au\right| + \left|\int_\Omega 2(\nabla\widetilde{\eta}.D(u)).Au\right| + \left|\int_\Omega \widetilde{\eta}\,\nabla\pi.Au\right|.$$

Pour le dernier terme, le lemme de régularité du problème de Stokes (lemme III.2.9) ainsi que celui de Poincaré (lemme III.2.8) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \widetilde{\eta}\nabla\pi.Au\right| = \left|\int_\Omega \pi\nabla\widetilde{\eta}.Au\right| &\leq |\pi|_{L^2/\mathbb{R}}|\nabla\widetilde{\eta}|_\infty|Au|_2,\\ &\leq C|\nabla u|_2\|\nabla\widetilde{\eta}\|_2|Au|_2 \leq \frac{\widetilde{\eta}_1}{4}|Au|_2^2 + C\|\nabla\widetilde{\eta}\|_2^2|\nabla u|_2^2.\end{aligned}$$

Les autres termes sont traités plus facilement et on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|_2^2}{2}\right) + \frac{\widetilde{\eta}_1}{2}|Au|_2^2 \leq C(|G_1|_2^2 + \|\nabla\widetilde{\eta}\|_2^2|\nabla u|_2^2).$$

Le lemme de Gronwall nous permet alors d'obtenir la première estimation

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;V_0)}^2 \leq (|\nabla u_0|_2^2 + C\|G_1\|_{L^2(0,T;L^2)}^2)e^{C\|\nabla\widetilde{\eta}\|_{L^2(0,T;H^2)}^2}, \tag{IV.2.2}$$

puis en intégrant en temps

$$\|Au\|_{L^2(0,T;V_0)}^2 \leq C(|\nabla u_0|_2^2 + \|G_1\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|\nabla\widetilde{\eta}\|_{L^2(0,T;H^2)}^2\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;V_0)}^2). \tag{IV.2.3}$$

• **Estimation de la dérivée $\partial_t u$ dans $L^\infty(0,T;V_0)\cap L^2(0,T;V_1)$**

En dérivant l'équation de Stokes (IV.2.1) par rapport au temps, on obtient une nouvelle équation de Stokes vérifiée par $w = \partial_t u$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t} - 2\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta}D(w)) + \nabla\dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial G_1}{\partial t} + 2\,\mathrm{div}\left(\dfrac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial t}D(u)\right),\\ \mathrm{div}\; w = 0,\\ w(0) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbb{P}G_1\big|_{t=0} + 2\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta}D(u))\big|_{t=0} \in V_0,\\ w|_\Gamma = 0.\end{cases}$$

En multipliant formellement cette équation par w on va en déduire les estimations d'énergie désirées. L'inégalité de Korn (lemme III.2.7) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|w|_2^2}{2}\right) + \widetilde{\eta}_1|\nabla w|_2^2 \leq C\left(\left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{-1}\|w\|_1 + \left|\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial t}\right|_\infty |D(u)|_2|D(w)|_2\right)$$

et finalement à l'aide du lemme de Poincaré et de l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|w|_2^2}{2}\right) + \frac{\widetilde{\eta}_1}{2}|\nabla w|_2^2 \leq C\left(\left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{-1}^2 + \left|\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial t}\right|_\infty^2 |\nabla u|_2^2\right).$$

Après intégration en temps,

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^\infty(0,T;V_0)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(0,T;V_0)}^2 \leq C\Bigg(|w(0)|_2^2 &+ \left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1})}^2\\ &+ \left\|\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^\infty)}^2 \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;V_0)}^2\Bigg).\end{aligned} \tag{IV.2.4}$$

• Estimation de la pression p dans $L^2(0,T;H^1/\mathbb{R}) \cap L^\infty(0,T;L^2/\mathbb{R})$

Afin d'utiliser la régularité du problème de Stokes, la première étape consiste à obtenir de la régularité sur le terme en pression. Afin d'isoler ce terme, réécrivons l'équation de Stokes (IV.2.1) sous la forme suivante :

$$\nabla p = G_1 + 2\,\mathrm{div}\,(\widetilde{\eta} D(u)) - w.$$

Le fait que $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$ et que $\partial_t G_1 \in L^2(0,T;H^{-1})$ assurent que $G_1 \in L^\infty(0,T;[H^1,H^{-1}]_{1/2})$. Le résultat d'interpolation $[H^1,H^{-1}]_{1/2} = L^2$, prouvé dans [57] p. 80, montre que $G_1 \in L^\infty(0,T;L^2)$. L'inconvénient d'une telle procédure est que l'estimation obtenue dépend du temps T. Plus exactement, on aurait

$$|G_1|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C(T)\left(\|G_1\|^2_{L^2(0,T;H^1)} + \left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})}\right).$$

L'hypothèse supplémentaire $G_1\partial_t G_1 \in L^1(0,T;L^1)$ va nous permettre d'obtenir une estimation où la dépendance de la constante sera explicite. On écrit, pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$,

$$G_1(t,x)^2 = G_1(0,x)^2 + 2\int_0^t G_1(s,x)\frac{\partial G_1}{\partial t}(s,x)ds,$$

puis en intégrant sur Ω, en prenant la borne supérieure pour $t \in [0,T]$, on a directement

$$|G_1|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq |G_1(0)|_2^2 + 2\left\|G_1\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{L^1(0,T;L^1)}.$$

Cette écriture permet de voir que la constante C apparaissant dans cette estimation est indépendante du temps T. On verra que ce point est essentiel pour la suite.

Les résultats précédents concernant la régularité de u et w permettent alors de prouver que

$$\nabla p \in L^2(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;H^{-1}).$$

D'après des inégalités de type Poincaré-Wirtinger (voir [83], p. 14-15), on en déduit directement

$$\begin{aligned}\|p\|^2_{L^\infty(0,T;L^2/\mathbb{R})} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^1/\mathbb{R})} \leq C\Bigg(&|G_1(0)|_2^2 + \left\|G_1\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{L^1(0,T;L^1)} \\ &+ \|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1)}\|\nabla\widetilde{\eta}\|^2_{L^2(0,T;H^2)} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1)} \\ &+ \|u\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^2)} + \|w\|^2_{L^\infty(0,T;V_0)} + \|w\|^2_{L^2(0,T;V_1)}\Bigg).\end{aligned} \tag{IV.2.5}$$

où la constante $C = C(\Omega)$ est indépendante du temps T.

• Estimation de u dans $L^\infty(0,T;V_1\cap H^2) \cap L^2(0,T;V_1\cap H^3)$

On réécrit à nouveau l'équation de Stokes (IV.2.1) sous une forme différente :

$$-\Delta u + \nabla\left(\frac{p}{\widetilde{\eta}}\right) = \frac{G_1}{\widetilde{\eta}} - \frac{1}{\widetilde{\eta}}w - p\,\nabla\left(\frac{1}{\widetilde{\eta}}\right) + \frac{2}{\widetilde{\eta}}\nabla\widetilde{\eta}.D(u).$$

Si on note R le second membre de cette égalité alors cette écriture nous permet d'utiliser les propriétés connues sur l'opérateur de Stokes (voir [19]) et en particulier de montrer que le champ de vitesse u est régulier : $u \in L^\infty(0,T;V_1\cap H^2) \cap L^2(0,T;V_1\cap H^3)$ avec les estimations suivantes :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} \leq \|R\|_{L^\infty(0,T;L^2)}, \quad \|u\|_{L^2(0,T;V_1\cap H^3)} \leq \|R\|_{L^2(0,T;H^1)}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer la norme de R dans $L^\infty(0,T;L^2)$ et dans $L^2(0,T;H^1)$. En notant que G_1, w, p et $D(u)$ sont dans $L^\infty(0,T;L^2)$, le fait de les multiplier par les fonctions $\widetilde{\eta}$, $\nabla\widetilde{\eta}$ qui sont elles mêmes très régulières n'altère donc pas leur régularité. Il en résulte que R est bien dans $L^\infty(0,T;L^2)$.

Pour ce qui est de la régularité $L^2(0,T;H^1)$ de R, on peut montrer que le gradient de R est dans $L^2(0,T;L^2)$ par des techniques semblables aux précédentes. On déduit :

$$\begin{aligned}
&\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^3)} \\
&\quad\leq C\Bigg(|G_1(0)|_2^2 + \left\|G_1\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{L^1(0,T;L^1)} + \|G_1\|^2_{L^2(0,T;H^1)} + \|w\|^2_{L^\infty(0,T;V_0)} + \|w\|^2_{L^2(0,T;V_1)} \\
&\qquad + \|\nabla\widetilde{\eta}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}(\|p\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|p\|^2_{L^2(0,T;H^1)}) + +\|\nabla\widetilde{\eta}\|^4_{L^\infty(0,T;H^2)}\|p\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\qquad + \|\nabla\widetilde{\eta}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^2)}) + +\|\nabla\widetilde{\eta}\|^4_{L^\infty(0,T;H^2)}\|u\|^2_{L^2(0,T;V_1)}\Bigg)
\end{aligned} \tag{IV.2.6}$$

Les estimations (IV.2.2), (IV.2.3), (IV.2.4), (IV.2.5) et (IV.2.6) permettent de conclure la preuve du lemme IV.2.1. Pour ce qui est de l'unicité, l'équation étant linéaire, il suffit de remarquer que si les conditions initiales sont nulles, et si $G_1 = 0$ alors les inégalités précédentes prouvent que u est identiquement nulle.

2.2 Equation de Cahn-Hilliard

Dans ce deuxième lemme, on va considérer une équation de type Cahn-Hilliard avec second membre :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \operatorname{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = \operatorname{div}\,(G_2), \\
\mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi), \\
\varphi(0) = \varphi_0, \quad \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial\mu}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.
\end{cases} \tag{IV.2.7}$$

Là aussi, les hypothèses sur le second membre seront justifiées par la suite.

Lemme IV.2.2
Supposons que $G_2 \in L^2(0,T;L^2)$, div $G_2 \in L^2(0,T;H^2)$, $G_2.n = 0$ *sur* Γ, div $\partial_t G_2 \in L^2(0,T;L^2)$, div $G_2(0) \in L^2$, $\varphi_0 \in \Phi_4$, *que* B *satisfait* (IV.1.2) *et que* F *vérifie* (IV.1.3), (IV.1.4) *et* (IV.1.5).

Alors il existe un temps $T_1 > 0$ *tel que le problème* (IV.2.7) *ait une solution unique* φ *sur* $[0,T_1[$. *Cette dernière vérifiant*

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T_1;\Phi_4)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T_1;\Phi_6)} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T_1;\Phi_0)} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T_1;\Phi_2)} \\
&\qquad\leq k_2\left(\|\varphi_0\|_4^2, \|\operatorname{div} G_2\|^2_{L^2(0,T;H^2)}, \|G_2\|^2_{L^2(0,T;L^2)}, \left\|\operatorname{div}\frac{\partial G_2}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}, |\operatorname{div}\,(G_2(0))|_2^2\right).
\end{aligned}$$

De plus, le temps T_1 *est donné par*

$$T_1 = \min\left\{T, \frac{1}{\Lambda}\right\}, \text{ avec } \quad \Lambda = k_{20}(\|\varphi_0\|_4^2, \|\operatorname{div} G_2\|^2_{L^2(0,T;H^2)}).$$

Remarque IV.2.2
Là aussi, il faut remarquer que les fonctions k_2 *et* k_{20} *sont d'une part croissantes en chaque variable, d'autre part indépendantes du temps d'existence* T_1.

2.2.1 Preuve du lemme IV.2.2

Exactement comme dans la preuve du lemme précédent, la forte régularité que ce lemme demande va nous obliger à agir en plusieurs étapes. Les estimations que l'on effectue sont en fait des estimations *a priori* et ne sont que formelles.

• **Estimation de φ dans $L^\infty(0,T;\Phi_1)\cap L^2(0,T;\Phi_3)$**

On choisit μ comme fonction test dans la formulation faible habituelle du problème et on a directement

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mu - \int_\Omega \text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)\mu = \int_\Omega \text{div}\,(G_2)\mu.$$

Par définition de μ, en intégrant par parties et en utilisant l'hypothèse $B_1 \leq B$ on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + \frac{B_1}{2}|\nabla\mu|_2^2 \leq \frac{1}{B_1}|G_2|_2^2.$$

On utilise alors le résultats suivant (voir [8]) : sous les hypothèses de "presque" convexité (IV.1.5) on a

$$\frac{B_1}{2}|\nabla\mu|_2^2 \geq \frac{B_1}{4}|\nabla\mu|_2^2 + C|\Delta\varphi|_2^2 + C\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) - CF_2(m(\varphi_0)),$$

où l'on rappelle que la moyenne $m(\varphi) = \int_\Omega \varphi$ est conservée au cours du temps (voir la partie 2.3 au chapitre précédent). L'estimation obtenue s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi)\right) + C_1\left(|\nabla\varphi|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi) + |\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\mu|_2^2\right)& \\ \leq \frac{1}{B_1}|G_2|_2^2 + CF_2(m(\varphi_0)).&\end{aligned} \tag{IV.2.8}$$

La régularité que l'on a obtenue sur μ indique que l'on doit avoir aussi plus de régularité sur φ (car moralement, $\mu \approx \Delta\varphi$). Ce résultat "intuitif" nécessite l'hypothèse supplémentaire (IV.1.4) (croissance sous polynomiale pour le potentiel F). Sous cette condition, on peut montrer que :

$$|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C_2(|\nabla\mu|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^{2p-2}|\Delta\varphi|_2^2). \tag{IV.2.9}$$

• **Estimation de φ dans $L^\infty(0,T;\Phi_2)\cap L^2(0,T;\Phi_4)$**

On choisit maintenant $\Delta^2\varphi$ comme fonction test dans l'équation de Cahn-Hilliard. Ce choix est entièrement justifié dans le cas d'une méthode d'approximation de type Galerkin, en ayant pris soin de choisir comme base de l'espace Φ_2, une base de vecteurs propres pour le laplacien. Après intégrations par parties du même type que celle faites dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) - \int_\Omega \text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)\Delta^2\varphi = \int_\Omega \text{div}\,(G_2)\Delta^2\varphi.$$

D'après la définition du potentiel μ, on a :

$$-\,\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = \alpha^2 B(\varphi)\Delta^2\varphi + \alpha^2 B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi - B'(\varphi)\nabla\varphi.\nabla F'(\varphi) - B(\varphi)\Delta F'(\varphi). \tag{IV.2.10}$$

On fait apparaitre la quantité $\alpha^2 B_1|\Delta^2\varphi|_2^2$ dans le membre de gauche et l'inégalité de Young permet alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \alpha^2 B_1|\Delta^2\varphi|_2^2 \leq \frac{\alpha^2 B_1}{2}|\Delta^2\varphi|_2^2 + C(|\,\text{div}\,(G_2)|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta\varphi|_2^2& \\ + |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla F'(\varphi)|_2^2 + |\Delta F'(\varphi)|_2^2).&\end{aligned}$$

Concernant les estimations du potentiel F, on écrit :

$$\nabla F'(\varphi) = F''(\varphi)\nabla\varphi \quad \text{et} \quad \Delta F'(\varphi) = F'''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + F''(\varphi)\Delta\varphi,$$

et d'après l'hypothèse (IV.1.4), on en déduit :

$$\begin{aligned}
&|\nabla F'(\varphi)|_2^2 \leq |F''(\varphi)|_\infty^2|\nabla\varphi|_2^2 \leq C(1+|\varphi|_\infty^{2p-2})|\nabla\varphi|_2^2 \leq C(1+\|\nabla\varphi\|_1^{2p-2})|\nabla\varphi|_2^2\\
&|\Delta F'(\varphi)|_2^2 \leq C(1+\|\nabla\varphi\|_1^{2q+2})\|\nabla\varphi\|_1^4 + C(1+\|\nabla\varphi\|_1^{2p-2})|\Delta\varphi|_2^2.
\end{aligned}$$

L'estimation d'énergie sur $|\Delta\varphi|_2^2$ devient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(|\Delta\varphi|_2^2\right) + \alpha^2 B_1|\Delta^2\varphi|_2^2 \leq C_3|\Delta\varphi|_2^2 + C|\operatorname{div}(G_2)|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_2^2) \tag{IV.2.11}$$

où $\mathbf{Q}$ est une fonction croissante, continue et nulle en zéro.

• Estimation de φ dans $L^\infty(0,T;\Phi_3)\cap L^2(0,T;\Phi_5)$

Dans ce paragraphe, on obtient une estimation à l'ordre suivant. Prenant $-\Delta^3\varphi$ pour fonction test, on en déduit tout d'abord :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) - \int_\Omega \nabla\operatorname{div}(B(\varphi)\nabla\mu)\cdot\nabla\Delta^2\varphi = \int_\Omega \nabla\operatorname{div}(G_2)\cdot\nabla\Delta^2\varphi.$$

Comme précédemment, on développe $\nabla\operatorname{div}(B(\varphi)\nabla\mu)$ (voir (IV.2.10)) afin de faire apparaitre le terme d'absorbtion $\alpha^2B_1|\nabla\Delta^2\varphi|_2^2$:

$$\begin{aligned}
-\nabla\operatorname{div}(B(\varphi)\nabla\mu) = \alpha^2 B(\varphi)\nabla\Delta^2\varphi &+ \alpha^2B'(\varphi)\nabla\varphi\Delta^2\varphi + \alpha^2B''(\varphi)\nabla\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi\\
&+ \alpha^2B'(\varphi)\nabla^2\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi + \alpha^2B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla^2\Delta\varphi\\
&- B''(\varphi)\nabla\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla F'(\varphi) - B'(\varphi)\nabla^2\varphi\cdot\nabla F'(\varphi)\\
&- B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla^2F'(\varphi) - B'(\varphi)\nabla\varphi\Delta F'(\varphi) - B(\varphi)\nabla\Delta F'(\varphi).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\Delta\varphi|_2^2}{2}\right) + \frac{\alpha^2B_1}{2}|\nabla\Delta^2\varphi|_2^2 \leq C\,\big(&|\nabla\operatorname{div}(G_2)|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|\Delta^2\varphi|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^4|\nabla\Delta\varphi|_2^2\\
&+ |\nabla^2\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla^2\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^4|\nabla F'(\varphi)|_2^2\\
&+ \|\nabla^2\varphi\|_1^2\|\nabla F'(\varphi)\|_1^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla^2F'(\varphi)|_2^2\\
&+ |\nabla\varphi|_\infty^2|\Delta F'(\varphi)|_2^2 + |\nabla\Delta F'(\varphi)|_2^2\big).
\end{aligned}$$

On se sert alors de l'injection de Sobolev $H^2\subset L^\infty$. Exactement comme à l'étape précédente, on développe le potentiel puis on utilise l'hypothèse (IV.1.4). Le dernier terme est le seul portant un élément "linéaire". On l'estime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\nabla\Delta F'(\varphi) = F^{(4)}(\varphi)\nabla\varphi(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi) + 2F'''(\varphi)\nabla^2\varphi\cdot\nabla\varphi + F'''(\varphi)\nabla\varphi\Delta\varphi + F''(\varphi)\nabla\Delta\varphi,\\
&|\nabla\Delta F'(\varphi)|_2^2 \leq |F^{(4)}(\varphi)|_\infty^2|\nabla\varphi|_\infty^6 + 2|F'''(\varphi)|_\infty^2|\nabla^2\varphi|_2^2|\nabla\varphi|_\infty^2\\
&\qquad\qquad + |F'''(\varphi)|_\infty^2|\nabla\varphi|_\infty^2|\Delta\varphi|_2^2 + |F''(\varphi)|_\infty^2|\nabla\Delta\varphi|_2^2.
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments que ceux utilisés auparavant induisent l'estimation :

$$\frac{d}{dt}\left(|\nabla\Delta\varphi|_2^2\right) + \alpha^2B_1|\nabla\Delta^2\varphi|_2^2 \leq C_4|\nabla\Delta\varphi|_2^2 + C|\nabla\operatorname{div}(G_2)|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_3^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_2^2) \tag{IV.2.12}$$

où $\mathbf{Q}$ est une autre fonction croissante, positive et nulle en zéro.

- **Estimation de φ dans $L^\infty(0,T;\Phi_4)\cap L^2(0,T;\Phi_6)$**

Pour obtenir encore plus de régularité, on choisit $\Delta^4\varphi$ pour fonction test :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta^2\varphi|_2^2}{2}\right)-\int_\Omega \Delta\,\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu).\Delta^3\varphi=\int_\Omega \Delta\,\text{div}\,(G_2).\Delta^3\varphi.$$

On développe $\Delta\,\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)$:

$$\begin{aligned}-\Delta\,\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)&=\alpha^2B(\varphi)\Delta^3\varphi+3\alpha^2B'(\varphi)\nabla\varphi.\nabla\Delta^2\varphi+\alpha^2B''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\Delta^2\varphi\\&+\alpha^2B'(\varphi)\Delta\varphi\Delta^2\varphi+\alpha^2B^{(3)}(\varphi)(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)(\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi)+\alpha^2B''(\varphi)\Delta\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi\\&+\alpha^2B''(\varphi)(\nabla\varphi\nabla\varphi):\nabla^2\Delta\varphi+2\alpha^2B''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla^2\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi+\alpha^2B'(\varphi)\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\Delta\varphi\\&+2\alpha^2B'(\varphi)\nabla^2\varphi:\nabla^2\Delta\varphi+\alpha^2B''(\varphi)\nabla\varphi\cdot(\nabla\varphi\cdot\nabla^2\Delta\varphi)-B^{(3)}(\varphi)(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)(\nabla\varphi\cdot\nabla F'(\varphi))\\&-B''(\varphi)\Delta\varphi(\nabla\varphi\cdot\nabla F'(\varphi))-2B''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla^2\varphi\cdot\nabla F'(\varphi)-2B''(\varphi)(\nabla\varphi\nabla\varphi):\nabla^2F'(\varphi)\\&-B'(\varphi)\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla F'(\varphi)-2B'(\varphi)\nabla^2\varphi:\nabla^2F'(\varphi)-B''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\Delta F'(\varphi)\\&-B'(\varphi)\Delta\varphi\Delta F'(\varphi)-3B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta F'(\varphi)-B(\varphi)\Delta^2F'(\varphi).\end{aligned}$$

On peut, pour y comprendre quelque chose, ne garder que les termes significatifs, les autres étant d'ordre inférieur. On obtient :

$$-\Delta\,\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)=\alpha^2B(\varphi)\Delta^3\varphi+3\alpha^2B'(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta^2\varphi-B(\varphi)\Delta^2F'(\varphi)+\ldots\qquad\text{(IV.2.13)}$$

Après intégration, le premier terme donne $\alpha^2B_1|\Delta^3\varphi|_2^2$ dans le membre de gauche de l'estimation. Encore d'après l'inégalité de Young, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\Delta^2\varphi|_2^2}{2}\right)+\frac{\alpha^2B_1}{2}|\Delta^3\varphi|_2^2\le C\left(|\Delta\,\text{div}\,(G_2)|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta^2\varphi|_2^2+|\Delta^2F'(\varphi)|_2^2+\ldots\right)$$

On ne détaille ici que les termes significatifs, les autres étant plus réguliers. Par exemple, pour le second on effectue une intégration par parties :

$$|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\Delta^2\varphi|_2^2\le C\|\nabla\varphi\|_2^2|\Delta^2\varphi|_2|\Delta^3\varphi|_2\le\frac{\alpha^2B_1|\Delta^3\varphi|_2^2}{4}+C\|\nabla\varphi\|_3^4$$

alors que le dernier est estimé par

$$\begin{aligned}\Delta^2F'(\varphi)&=F^{(5)}(\varphi)(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)^2+4F^{(4)}(\varphi)\Delta\varphi(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)+2F^{(4)}(\varphi)\nabla\varphi.(\nabla^2\varphi\cdot\nabla\varphi)\\&\quad+4F'''(\varphi)\nabla\Delta\varphi\cdot\nabla\varphi+2F'''(\varphi)\nabla^2\varphi:\nabla^2\varphi+F'''(\varphi)(\Delta\varphi)^2+F''(\varphi)\Delta^2\varphi,\\|\Delta^2F'(\varphi)|_2^2&\le C(|F^{(5)}(\varphi)|_\infty^2\|\nabla\varphi\|_2^8+|F^{(4)}(\varphi)|_\infty^2\|\nabla\varphi\|_2^6+|F'''(\varphi)|_\infty^2\|\nabla\varphi\|_2^4+|F''(\varphi)|_\infty^2|\Delta^2\varphi|_2^2).\end{aligned}$$

Les mêmes types d'arguments qu'aux paragraphes précédents prouvent l'estimation

$$\frac{d}{dt}\left(|\Delta^2\varphi|_2^2\right)+\alpha^2B_1|\Delta^3\varphi|_2^2\le C_5|\Delta^2\varphi|_2^2+C|\Delta\,\text{div}\,(G_2)|_2^2+\|\nabla\varphi\|_3^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_3^2)\qquad\text{(IV.2.14)}$$

où $\mathbf{Q}$ est une fonction croissante, positive et telle que $\mathbf{Q}(0)=0$.

- **Estimation de $\partial_t\varphi$ dans $L^2(0,T;\Phi_2)$**

Il est maintenant aisé d'obtenir une estimation de la dérivée en temps de φ. On écrit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{div}\,G_2+\text{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu)).$$

Un résultat classique sur les équations de Cahn-Hilliard montre que la moyenne en espace de $\partial_t\varphi$ est nulle (voir paragraphe 2.3). Avec l'inégalité de Poincaré et en utilisant l'équation (IV.2.13), on trouve :

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_2^2 \le \left|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_2^2 \le C_6|\Delta^3\varphi|_2^2 + C_7|\Delta^2\varphi|_2^2 + C|\Delta\,\mathrm{div}\,(G_2)|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_3^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_3^2). \qquad \text{(IV.2.15)}$$

• **Un premier bilan des estimations obtenues.**

Ajoutant les six estimations sur φ

$$\begin{aligned} \big(2C_2 + 2C_3(C_5 + \alpha^2 B_1 C_7/C_6)\big)/C_1 &\times \text{(IV.2.8)}\\ + 2 &\times \text{(IV.2.9)}\\ + 2(C_5 + \alpha^2 B_1 C_7/C_6) &\times \text{(IV.2.11)}\\ + 1/C_4 &\times \text{(IV.2.12)}\\ + 2\alpha^2 B_1 &\times \text{(IV.2.14)}\\ + \alpha^4 B_1^2/C_6 &\times \text{(IV.2.15)}, \end{aligned}$$

et en remarquant que les normes $\|\varphi\|_4^2$ et $\|\varphi\|_6^2$ sont équivalentes respectivement à $|\nabla\varphi|_2^2 + |\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\Delta\varphi|_2^2 + |\Delta^2\varphi|_2^2$ et $|\nabla\varphi|_2^2 + |\Delta\varphi|_2^2 + |\nabla\Delta\varphi|_2^2 + |\Delta^2\varphi|_2^2 + |\nabla\Delta^2\varphi|_2^2 + |\Delta^3\varphi|_2^2$ (utiliser pour le montrer la régularité du laplacien, lemme III.2.3) on obtient finalement :

$$y'(t) + Cz(t) \le y(t)\mathbf{Q}(y(t)) + \|\,\mathrm{div}\,(G_2)\|_2^2 + CF_2(m(\varphi_0)), \qquad \text{(IV.2.16)}$$

où

$$y(t) = \|\nabla\varphi\|_3^2 + \frac{2}{\alpha^2}\int_\Omega F(\varphi) \quad \text{et} \quad z(t) = \|\nabla\varphi\|_5^2 + \frac{2}{\alpha^2}\int_\Omega F(\varphi) + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_2^2.$$

Le lemme qui suit fournit l'existence d'un temps $T_1 > 0$ tel que $y(t) \le M$ pour tout $t \le T_1$ (*i.e.* φ est bornée dans $L^\infty(0, T_1; \Phi_4)$). De plus, M et T_1 sont données par :

$$\begin{aligned} M &= \big(y(0) + \|\,\mathrm{div}\,(G_2)\|_{L^2(0,T;H^2)} + TCF_2(m(\varphi_0))\big)e^1,\\ T_1 &= \min\left\{T, \frac{1}{\mathbf{Q}(M)}\right\}. \end{aligned}$$

Lemme IV.2.3

Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $[0, T]$ et vérifiant

$$y' \le y\,\mathbf{Q}(y) + f.$$

Supposons que $\mathbf{Q}$ soit une fonction régulière et croissante, et que f soit intégrable sur $[0, T]$, alors

$$\begin{aligned} &y(t) \le M \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0, T_1]\\ &\textit{où} \quad M = (y(0) + |f|_1)e^1 \quad \textit{et} \quad T_1 = \mathit{min}\left\{T, \frac{1}{\mathbf{Q}(M)}\right\}. \end{aligned}$$

Preuve du lemme IV.2.3 : Afin de prouver ce résultat, considérons l'ensemble

$$I = \{s \in \mathbb{R}^+ \;/\; \forall t \in [0, s] \quad y(t) \le M\}.$$

Puisque $y(0) \le M$, il est clair que $0 \in I$. Supposons qu'il existe $s < T_1$ tel que $s \in I$. Pour tout $t \in [0, s]$, on a $y(t) \le M$ et comme $\mathbf{Q}$ est croissante, on déduit :

$$y'(t) \le y(t)\mathbf{Q}(M) + f(t).$$

Utilisant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$y(t) \leq (y(0) + |f|_1)e^{s\mathbf{Q}(M)} < M.$$

Par continuité, il résulte que I est ouvert dans $[0, T_1[$. Il y est clairement fermé, donc on a $[0, T_1[\subset I$. ■

Maintenant, en intégrant en temps l'inégalité (IV.2.16), on déduit une estimation de φ dans $L^2(0, T_1; \Phi_6)$ ainsi qu'une estimation de $\partial_t\varphi$ dans $L^2(0, T_1; \Phi_2)$.

• Estimation de $\partial_t\varphi$ dans $L^\infty(0, T_1; \Phi_0)$

Puisque $\partial_t\varphi = \text{ div } (G_2 + B(\varphi)\nabla\mu)$, les estimations précédentes prouvent que $\partial_t\varphi \in L^\infty(0, T_1; \Phi_0)$. D'après (IV.2.10), on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_2^2 &\leq C(|\text{ div } G_2|_2^2 + |\text{ div } (B(\varphi)\nabla\mu)|_2^2) \\ &\leq C(|\text{ div } G_2|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_3^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_2^2)).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\text{div } G_2 \in L^2(0, T; L^2)$ et que $\partial_t \text{ div } G_2 \in L^2(0, T; L^2)$ on obtient une borne pour $\text{div } G_2$ dans $L^\infty(0, T; L^2)$. Pour cela, on écrit

$$\text{div } G_2(t)^2 = \text{ div } G_2(0)^2 + 2\int_0^t \text{ div } G_2(s) \text{ div } \frac{\partial G_2}{\partial t}(s)ds,$$

puis on intègre sur Ω et on prend la borne supérieur pour $t \in [0, T]$:

$$\|\text{ div } G_2\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \leq |\text{ div } G_2(0)|_2^2 + \|\text{ div } G_2\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \left\|\text{div } \frac{\partial G_2}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2.$$

Finalement, on a $\partial_t\varphi \in L^\infty(0, T_1; \Phi_0)$ avec la relation suivante (en utilisant la monotonie de $\mathbf{Q}$)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T_1;\Phi_0)} \leq C \Bigg(&|\text{ div } G_2(0)|_2^2 + \|\text{ div } G_2\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \left\|\text{div } \frac{\partial G_2}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \\ &+ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;\Phi_3)}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;\Phi_2)}^2\mathbf{Q}(\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;\Phi_2)}^2)\Bigg).\end{aligned} \tag{IV.2.17}$$

où la constante C est indépendante de T.

Cette inégalité conclue la preuve de l'existence de solutions régulières au problème de Cahn-Hilliard (IV.2.7). Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité d'une telle solution :

• Unicité

Considérons φ_1 et φ_2 deux solutions du système (IV.2.7). On note $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, on effectue la différence des deux équations puis on multiplie par $-\Delta\varphi$. Après des calculs similaires aux précédents, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\varphi|_2^2}{2}\right) &+ \alpha^2\int_\Omega (B(\varphi_1) - B(\varphi_2))\nabla\Delta\varphi_1.\nabla\Delta\varphi + \alpha^2\int_\Omega B(\varphi_2)\nabla\Delta\varphi.\nabla\Delta\varphi \\ &- \int_\Omega (BF''(\varphi_1) - BF''(\varphi_2))\nabla\varphi_1.\nabla\Delta\varphi - \int_\Omega BF''(\varphi_2)\nabla\varphi.\nabla\Delta\varphi = 0.\end{aligned}$$

On peut alors utiliser les bornes sur B ainsi que celles sur ses dérivées (hypothèse (IV.1.2)) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\varphi|_2^2}{2}\right) + \alpha^2 B_1|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C(|\varphi|_\infty|\nabla\Delta\varphi_1|_2|\nabla\Delta\varphi|_2 + |\varphi|_\infty|\nabla\varphi_1|_2|\nabla\Delta\varphi|_2 + |\nabla\varphi|_2|\nabla\Delta\varphi|_2).$$

Pour ce qui est des deux premiers termes du membre de droite, on peut utiliser l'inégalité d'Agmon [2] :

$$|\varphi|_\infty |\nabla\Delta\varphi|_2 \leq |\nabla\varphi|_2^{3/4}|\nabla\Delta\varphi|_2^{5/4} \leq \frac{\alpha^2 B_1}{6}|\nabla\Delta\varphi|_2^2 + C|\nabla\varphi|_2^2.$$

Les majorations étant évidentes pour les autres termes (à l'aide de l'inégalité de Young), on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\varphi|_2^2}{2}\right) + \frac{\alpha^2 B_1}{2}|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C(\|\nabla\varphi_1\|_2^2 + 1)|\nabla\varphi|_2^2.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\|\nabla\varphi_1\|_2^2 \in L^1(0,T_1)$ et d'appliquer le lemme de Gronwall ; les conditions initiales sur φ étant nulles, φ est identiquement nulle.

2.3 Loi constitutive de type Oldroyd

Ce troisième lemme concerne l'équation de la loi constitutive de type Oldroyd. C'est une équation de type transport et sa résolution se fait à l'aide de la méthode des caractéristiques. L'équation s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} + (\widetilde{u} + h)\cdot\nabla\sigma + g(\sigma, \nabla(\widetilde{u}+h)) + l(\widetilde{\varphi})\sigma = G_3, \\ \sigma(0) = \sigma_0. \end{cases} \tag{IV.2.18}$$

On montre le résultat suivant :

Lemme IV.2.4
Si on suppose que $G_3 \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^1(0,T;H^2)$, $\widetilde{u} \in L^\infty(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^1(0,T;V_1 \cap H^3)$, $\nabla\widetilde{\varphi} \in L^\infty(0,T;H^2)$, $\sigma_0 \in H^2$, h *satisfait* (IV.1.6) *et que* l *satisfait* $0 < l_1 \leq l \leq l_2$,
alors le problème (IV.2.18) *admet une unique solution* σ *telle que :*

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq & k_3\Big(\|\sigma_0\|_2^2, \|G_3\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)}, \|G_3\|^2_{L^1(0,T;H^2)}, \|h\|_3^2, \\ & \|\widetilde{u}\|^2_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)}, \|\widetilde{u}\|^2_{L^1(0,T;V_1\cap H^3)}, \|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\Big). \end{aligned} \tag{IV.2.19}$$

Remarque IV.2.3
On peut observer que la solution σ *n'est pas seulement* $L^\infty(0,T;H^2)$ *mais aussi* $\mathcal{C}([0,T];H^2)$. *En effet, l'hypothèse sur le champ de vitesse* $\widetilde{u} \in L^1(0,T;V_1 \cap H^3)$ *permet d'affirmer que la solution du système :*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t,s;x) = (\widetilde{u}+h)(t, U(t,s;x))) \;\; sur\,]0,T[, \\ U(s,s;x) = x \;\; sur\, \Omega, \end{cases}$$

est continue en les deux première variables, et H^3 *en espace. On a alors une représentation intégrale de la solution du type (voir [7]) :*

$$\sigma(t,x) = \sigma_0(U(0,t;x)) + \int_0^t (G_3 - g(\sigma, \nabla(\widetilde{u}+h)) - l(\widetilde{\varphi})\sigma)(s, U(s,t;x))ds.$$

Cette formulation nous permet d'en déduire que $\sigma \in \mathcal{C}([0,T];H^2)$. *Par ailleurs, en ajoutant les hypothèses* $\widetilde{u} \in \mathcal{C}([0,T];H^2)$ *et* $G_3 \in \mathcal{C}([0,T];H^1)$, *il est aussi facile de montrer que* $\partial_t\sigma \in \mathcal{C}([0,T];H^1)$.

2.3.1 Preuve du lemme IV.2.4

Pour simplifier les notations, on note, au cours de cette preuve, $\widetilde{v} = \widetilde{u} + h$ de sorte que $\widetilde{v}$ est un champ de vecteur défini sur l'ouvert Ω, à divergence nulle et tangent au bord.

L'existence et l'unicité d'une solution au système (IV.2.18) résultent de la méthode des caractéristiques. Il faut tout de même remarquer que cette méthode est généralement utilisée lorsque le champ de vitesse est de classe $\mathcal{C}^1$. On considère donc une suite $\{\widetilde{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\widetilde{v}_n \in \mathcal{C}^1([0,T])$ converge vers $\widetilde{v}$ dans l'espace $L^1([0;T], V_1 \cap H^3)$. On considère aussi une suite $\{\sigma_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ convergeant vers σ_0 dans H^2. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, la méthode classique des caractéristiques fournit l'existence d'une unique solution σ_n vérifiant l'équation (IV.2.18). Il suffit donc de prouver les estimations (IV.2.19)$_n$ (l'indice 'n' étant ici pour indiquer que les estimations considérées sont celles concernant σ_n), puis de passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

• Estimation de $\boldsymbol{\sigma_n}$ dans $\boldsymbol{L^\infty(0,T;H^2)}$

Au cours de ce paragraphe, on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans L^2 et $<\cdot,\cdot>$ celui dans H^2. En effectuant le produit scalaire dans H^2 de l'équation (IV.2.18)$_n$ par σ_n, on obtient :

$$< \frac{\partial \sigma_n}{\partial t}, \sigma_n > + < \widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n > + < g(\sigma_n, \nabla\widetilde{v}_n), \sigma_n > + < l(\widetilde{\varphi})\sigma_n, \sigma_n > = < G_3, \sigma_n > .$$

On traite le terme $< \widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n >$ en commencant par le développer

$$< \widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n >= (\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n) + (\nabla(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n), \nabla\sigma_n) + (\nabla\nabla(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n), \nabla\nabla\sigma_n).$$

Puisque $\widetilde{v}_n$ est à divergence nulle et tangent au bord, le lemme III.2.2 permet d'annuler $(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n)$, les autres termes s'écrivent de la manière suivante. Pour le second terme (dans ce calcul, on utilise la notation d'Einstein sur les sommations et on oublie momentanément l'indice n) :

$$\nabla(\widetilde{v} \cdot \nabla\sigma) = \partial_i(\widetilde{v}_j \partial_j \sigma_{kl}) = (\partial_i \widetilde{v}_j)(\partial_j \sigma_{kl}) + \widetilde{v}_j(\partial_i\partial_j\sigma_{kl}) = \nabla\widetilde{v} \cdot \nabla\sigma + \widetilde{v} \cdot \nabla\nabla\sigma,$$

et ainsi, puisque $\widetilde{v}$ est à divergence nulle et tangent au bord, le lemme III.2.2 implique

$$(\nabla(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n), \nabla\sigma_n) = (\nabla\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \nabla\sigma_n) \leq |\nabla\widetilde{v}_n|_\infty |\nabla\sigma_n|_2^2.$$

De même, le dernier terme s'écrit

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n) &= \nabla\nabla\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n + 2\nabla\widetilde{v}_n \cdot \nabla\nabla\sigma_n + \widetilde{v}_n \cdot \nabla\nabla\nabla\sigma_n, \\
(\nabla\nabla(\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n), \nabla\nabla\sigma_n) &= (\nabla\nabla\widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \nabla\nabla\sigma_n) + 2(\nabla\widetilde{v}_n \cdot \nabla\nabla\sigma_n, \nabla\nabla\sigma_n) \\
&\leq |\nabla\nabla\widetilde{v}_n|_6 |\nabla\sigma_n|_3 |\nabla\nabla\sigma_n|_2 + 2|\nabla\widetilde{v}_n|_\infty |\nabla\nabla\sigma_n|_2^2.
\end{aligned}$$

On en déduit l'estimation

$$| < \widetilde{v}_n \cdot \nabla\sigma_n, \sigma_n > | \leq C\|\widetilde{v}_n\|_3 \|\sigma_n\|_2^2.$$

On va ensuite obtenir une estimation du même type pour $< g_a(\sigma_n, \widetilde{v}_n), \sigma_n >$. Pour cela, on va montrer le résultat pour le terme $< \nabla\widetilde{v}_n \cdot \sigma_n, \sigma_n >$, les autres termes se traitant de la même façon. On a

$$(\nabla\widetilde{v}_n \cdot \sigma_n, \sigma_n) \leq |\nabla\widetilde{v}_n|_\infty |\sigma_n|_2^2,$$

$$\begin{aligned}
(\nabla(\nabla\widetilde{v}_n \cdot \sigma_n), \nabla\sigma_n) &= (\nabla\nabla\widetilde{v}_n \cdot \sigma_n, \nabla\sigma_n) + (\nabla\sigma_n \cdot (\nabla\widetilde{v}_n)^t, \nabla\sigma_n) \\
&\leq |\nabla\nabla\widetilde{v}_n|_6 |\sigma_n|_3 |\nabla\sigma_n|_2 + |(\nabla\widetilde{v}_n)^t|_\infty |\nabla\sigma_n|_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla\nabla(\nabla\widetilde{v}_n\cdot\sigma_n),\nabla\nabla\sigma_n) &= (\nabla\nabla\nabla\widetilde{v}_n\cdot\sigma_n,\nabla\nabla\sigma_n)+2(\nabla\sigma_n\cdot(\nabla\nabla\widetilde{v}_n)^*,\nabla\nabla\sigma_n)\\ &\quad+(\nabla\nabla\sigma_n\cdot(\nabla\widetilde{v}_n)^t,\nabla\nabla\sigma_n)\\ &\le |\nabla\nabla\nabla\widetilde{v}_n|_2|\sigma_n|_\infty|\nabla\nabla\sigma_n|_2+2|\nabla\sigma_n|_3|(\nabla\nabla\widetilde{v}_n)^*|_6|\nabla\nabla\sigma_n|_2\\ &\quad+|\nabla\nabla\sigma_n|_2|(\nabla\widetilde{v}_n)^t|_\infty|\nabla\nabla\sigma_n|_2,\end{aligned}$$

où l'exposant $*$ désigne des permutations sur les indices du tenseur en question. En remarquant qu'une telle permutation sur les indices ne change pas la norme L^p d'un tenseur, on en déduit

$$|< g_a(\sigma_n,\widetilde{v}_n),\sigma_n >| \le C\|\widetilde{v}_n\|_3\|\sigma_n\|_2^2.$$

En ce qui concerne le terme $< l(\widetilde{\varphi})\sigma_n,\sigma_n >$, , il suffit de le décomposer en trois parties :

$$\begin{aligned}< l(\widetilde{\varphi})\sigma_n,\sigma_n > &= (l(\widetilde{\varphi})\sigma_n,\sigma_n)+(\nabla(l(\widetilde{\varphi})\sigma_n),\nabla\sigma_n)+(\nabla\nabla(l(\widetilde{\varphi})\sigma_n),\nabla\nabla\sigma_n),\\ &\ge l_1\|\sigma_n\|_2^2+(l'(\widetilde{\varphi})\nabla\widetilde{\varphi}\,\sigma_n,\nabla\sigma_n)+(l''(\widetilde{\varphi})(\nabla\widetilde{\varphi})^2\sigma_n,\nabla\nabla\sigma_n)\\ &\quad+(l'(\widetilde{\varphi})\nabla\nabla\widetilde{\varphi}\,\sigma_n,\nabla\nabla\sigma_n)+2(l'(\widetilde{\varphi})\nabla\widetilde{\varphi}\nabla\sigma_n,\nabla\nabla\sigma_n).\end{aligned}$$

On majore les quatre derniers termes en valeur absolue. Par exemple, en utilisant successivement l'injection $H^2\subset L^\infty$ et les inégalités de Sobolev (lemme III.2.5) le deuxième de ces termes s'écrit :

$$\begin{aligned}|(l''(\widetilde{\varphi})(\nabla\widetilde{\varphi})^2\sigma_n,\nabla\nabla\sigma_n)| &\le |l''|_\infty|\nabla\widetilde{\varphi}|_6|\nabla\widetilde{\varphi}|_3|\sigma_n|_\infty|\nabla\nabla\sigma_n|_2,\\ &\le C|\nabla\widetilde{\varphi}|_6|\nabla\widetilde{\varphi}|_3\|\sigma_n\|_2^2,\\ &\le C(|\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2+|\Delta\widetilde{\varphi}|_2^2)\|\sigma_n\|_2^2.\end{aligned}$$

On peut regrouper toutes ces estimations sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\|\sigma_n\|_2^2}{2}\right)+l_1\|\sigma_n\|_2^2\le C(\|\widetilde{v}_n\|_3+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_2+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_2^2)\|\sigma_n\|_2^2+\|G_3\|_2\|\sigma_n\|_2.$$

L'hypothèse sur G_3 ne nous permet pas de traiter le terme $\|G_3\|_2\|\sigma_n\|_2$ comme à l'habitude, c'est-à-dire en utilisant l'inégalité de Young. En effet, puisque $\|G_3\|_2^2$ n'est pas L^1 en temps, on ne pourrait pas utiliser le lemme de Gronwall. Par contre, en divisant par $\|\sigma_n\|_2$, on en déduit une inégalité du type

$$\frac{d\,\|\sigma_n\|_2}{dt}+l_1\|\sigma_n\|_2\le C(\|\widetilde{v}_n\|_3+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_2+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_2^2)\|\sigma_n\|_2+\|G_3\|_2.$$

Une application du lemme de Gronwall nous donne alors directement le résultat concernant l'estimation du tenseur σ_n :

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^2)}\le(\|\sigma_0\|_2+\|G_3\|_{L^1(0,T;H^2)})e^{C(\|\widetilde{u}_n\|_{L^1(0,T;V_1\cap H^3)}+\|h\|_3+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^1(0,T;H^2)}+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;H^2)})}.$$

• **Estimation de $\partial_t\sigma_n$ dans $L^\infty(0,T;H^1)$**

Pour ce qui est de l'estimation de la dérivée temporelle, il suffit d'isoler cette dérivée de l'équation (IV.2.18) :

$$\frac{\partial\,\sigma_n}{\partial t}=G_3-\widetilde{v}_n\cdot\nabla\sigma_n-g(\sigma_n,\nabla\widetilde{v}_n)-l(\widetilde{\varphi})\sigma_n$$

puis de remarquer, en utilisant le lemma III.2.6, que l'on a :

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{v}_n.\nabla\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\le C\|\widetilde{v}_n\|_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)}\|\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^2)},\\ &\|g(\sigma_n,\nabla\widetilde{v}_n)\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\le C\|\widetilde{v}_n\|_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)}\|\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^2)},\\ &\|l(\widetilde{\varphi})\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\le C(1+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty(0,T;L^2)})\|\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^2)},\end{aligned}$$

afin d'obtenir l'estimation voulue sur $\partial_t \sigma_n$:

$$\left\| \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq C\Big(1 + \|\widetilde{u}_n\|_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} + \|h\|_2 + \|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\Big)\|\sigma_n\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \|G_3\|_{L^\infty(0,T;H^1)}. \tag{IV.2.20}$$

• **Passage à la limite**

Les estimations (IV.2.19)$_n$ prouvent que, quitte à extraire des sous-suites, on a l'existence de σ telle que

$$\begin{aligned} &\sigma_n \rightharpoonup \sigma \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H^2) \text{ faible-}*,\\ &\frac{\partial \sigma_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H^1) \text{ faible-}*,\\ &\sigma_n \longrightarrow \sigma \text{ dans } L^2(0,T;H^1) \quad \text{p.p..} \end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite $n \to +\infty$ dans (IV.2.18)$_n$ ce qui prouve que σ est solution de (IV.2.18). Afin d'obtenir les estimations, il suffit de passer à la limite inférieure dans (IV.2.19)$_n$ en utilisant la continuité inférieure des normes avec les topologies faible et faible-$*$. Quant à l'unicité, elle découle directement du fait que (IV.2.18) est linéaire en σ.

2.4 Preuve de l'existence dans le théorème IV.1.1

C'est dans ce paragraphe que l'on va réellement prouver le théorème IV.1.1. On se donne donc des données initiales régulières :

$$\begin{aligned} &v_0 = u_0 + h, \quad u_0 \in V_1 \cap H^2, \quad h \in H^3,\\ &\varphi_0 \in \Phi_4,\\ &\sigma_0 \in H^2. \end{aligned}$$

On définit l'espace de Banach $X_T = \mathcal{C}([0,T];L^2) \times \mathcal{C}([0,T];L^2) \times \mathcal{C}([0,T];L^2)$. Pour tout $T > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ et $M_3 > 0$, introduisons l'ensemble

$$\begin{aligned} R_T(M_1,M_2,M_3) = \Big\{&(u+h,\varphi,\sigma) \in X_T \text{ tel que}\\ &u \in L^\infty(0,T;V_1\cap H^2) \cap L^2(0,T;V_1 \cap H^3), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;V_0) \cap L^2(0,T;V_1),\\ &\varphi \in L^\infty(0,T;\Phi_4) \cap L^2(0,T;\Phi_6), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^\infty(0,T;\Phi_0) \cap L^2(0,T;\Phi_2),\\ &\sigma \in L^\infty(0,T;H^2), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^1),\\ &u(0) = u_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0,\\ &\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;V_0)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;V_1)} \leq M_1,\\ &\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;\Phi_4)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;\Phi_6)} + \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;\Phi_0)} + \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;\Phi_2)} \leq M_2,\\ &\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^2)} + \left\|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq M_3\Big\}. \end{aligned}$$

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta\ : & R_T(M_1,M_2,M_3) & \longrightarrow & X_T\\ & (\widetilde{u}+h,\widetilde{\varphi},\widetilde{\sigma}) & \longmapsto & (u+h,\varphi,\sigma) \end{array}$$

où u, φ et σ sont les uniques solutions des problèmes (IV.2.1), (IV.2.7) et (IV.2.18) respectivement, avec

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\eta} = \eta(\widetilde{\varphi}),\\
&G_1 = -\alpha^2 \Delta\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi} + \text{ div } \widetilde{\sigma} - (\widetilde{u}+h)\cdot\nabla(\widetilde{u}+h) + 2\,\text{div }(\eta(\widetilde{\varphi})D(h)),\\
&G_2 = -\widetilde{\varphi}\,(\widetilde{u}+h),\\
&G_3 = \nu(\widetilde{\varphi})D(\widetilde{u}+h).
\end{aligned}$$

En remarquant qu'un point fixe $(v = u+h, \varphi, \sigma)$ de l'application Θ sera solution du problème initial (IV.1.1), il ne reste plus qu'à trouver un point fixe ! On va appliquer le théorème de Schauder à l'application Θ. Pour cela, on va montrer successivement

(i) d'abord que $R_T(M_1, M_2, M_3)$ est non vide pour M_1, M_2, M_3 assez grands et pour tout T,

(ii) puis l'existence d'un temps $T^* > 0$ assez petit pour que $\Theta(R_{T^*}(M_1, M_2, M_3)) \subset R_{T^*}(M_1, M_2, M_3)$,

(iii) et enfin, que X_{T^*} est localement convexe, que R_{T^*} est convexe compact (ses deux points sont justifiés par les définitions de X_{T^*} et R_{T^*}) et que Θ est une application continue.

La première étape consiste donc à trouver un élément qui soit dans $R_T(M_1, M_2, M_3)$ pour tout $T > 0$, quitte à choisir les réels M_1, M_2 et M_3 grands.

Etape (i)
Considérons u^* et φ^* les solutions sur $\mathbb{R}^+$ des problèmes suivants

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* + \nabla p^* = 0, \quad \text{div } u^* = 0, \quad u^*(0) = u_0, \quad u^*|_\Gamma = 0,\\
&\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \Delta^2\varphi^* = 0, \quad \varphi^*(0) = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial \Delta\varphi^*}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur les démonstrations des lemmes IV.2.1 et IV.2.2, on prouve facilement qu'il existe une constante J telle que pour tout temps $T > 0$ on ait :

$$\begin{aligned}
&\|u^*\|^2_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^2)} + \|u^*\|^2_{L^2(0,T;V_1\cap H^3)} + \left\|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;V_0)} + \left\|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;V_1)} \leq J|\Delta v_0|_2^2,\\
&\|\varphi^*\|^2_{L^\infty(0,T;H^4)} + \|\varphi^*\|^2_{L^2(0,T;H^6)} + \left\|\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;\Phi_0)} + \left\|\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;\Phi_2)} \leq J\|\varphi_0\|_4^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on choisit $M_1 \geq J|\Delta u_0|_2^2$, $M_2 \geq J\|\varphi_0\|_4^2$ et $M_3 \geq \|\sigma_0\|_2$ alors $(u^*+h, \varphi^*, \sigma_0) \in R_T(M_1, M_2, M_3)$. Donc, pour M_1, M_2 et M_3 suffisamment grands on a $R_T(M_1, M_2, M_3) \neq \emptyset$ pour tout $T > 0$.

Etape (ii)
Cette étape se décompose en deux parties. Dans la première, on obtient des estimations sur les termes "sources" G_1, G_2 et G_3 de sorte que l'on puisse appliquer les lemmes IV.2.1, IV.2.2 et IV.2.4. En fait, on va montrer que les termes sources sont un peu plus réguliers en temps que ce que l'on demande dans chaque lemme. Ceci permettra de mettre en place la deuxième partie de l'étape qui consiste à trouver M_1, M_2, M_3 et T^* tels que $R_{T^*}(M_1, M_2, M_3)$ soit stable par Θ.

Estimation de G_1 :
La régularité qui est demandée sur G_1 dans le lemme IV.2.1 est la suivante :

$$G_1 \in L^2(0,T;H^1), \quad \frac{\partial G_1}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}),$$
$$G_1 \cdot \frac{\partial G_1}{\partial t} \in L^1(0,T;L^1) \quad \text{et} \quad G_1(0) \in L^2.$$

Comme on vient de l'expliquer, on va montrer que G_1 est un peu plus régulier en temps. Rappelons tout d'abord sa définition :

$$G_1 = -\alpha^2 \Delta\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi} + \text{ div } \widetilde{\sigma} - (\widetilde{u}+h)\cdot\nabla(\widetilde{u}+h) + 2\,\text{div } (\eta(\widetilde{\varphi})D(h)).$$

Si l'on suppose que $(\widetilde{u}+h, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma}) \in R_T$ alors en utilisant le lemme III.2.6, le produit $\Delta\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi}$ vérifie

$$\|\Delta\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le CT\ \|\Delta\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CTM_2^2.$$

La même méthode nous permet de vérifier que les autres termes sont aussi réguliers :

$$\begin{aligned}
&\|\text{ div } \widetilde{\sigma}\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le CT\ M_3,\\
&\|(\widetilde{u}+h)\cdot\nabla(\widetilde{u}+h)\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le CT\ \|\widetilde{u}+h\|^4_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CT\ (M_1^2 + \|h\|_2^4),\\
&\|\text{ div } (\eta(\widetilde{\varphi})D(h))\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le CT\ \|\eta(\widetilde{\varphi})\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\|h\|_3^2 \le CT\ (1+M_2^2)\ \|h\|_3^2.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour la dernière inégalité, on a utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\|\eta(\widetilde{\varphi})\|_2^2 &= |\eta(\widetilde{\varphi})|_2^2 + |\eta'(\widetilde{\varphi})\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2 + |\eta''(\widetilde{\varphi})\nabla\widetilde{\varphi}\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2 + |\eta'(\widetilde{\varphi})\nabla\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2\\
&\le |\eta|^2_\infty + |\eta'|^2_\infty|\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2 + |\eta''|^2_\infty|\nabla\widetilde{\varphi}|_4^4 + |\eta'|^2_\infty|\nabla\nabla\widetilde{\varphi}|_2^2\\
&\le C(1+M_2^2).
\end{aligned} \tag{IV.2.21}$$

On trouve finalement que $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$ avec :

$$\|G_1\|^2_{L^2(0,T;H^1)} \le CT(M_1^2 + M_2^2 + M_3 + \|h\|_2^4 + \|h\|_3^2 + M_2^2\|h\|_3^2).$$

Pour ce qui est de la régularité de la dérivée en temps, on a par définition

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial t} = -\alpha^2\Delta\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\,\nabla\widetilde{\varphi} - \alpha^2\Delta\widetilde{\varphi}\,\nabla\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t} + \text{ div } \frac{\partial\widetilde{\sigma}}{\partial t} + 2\,\text{div } (\eta'(\widetilde{\varphi})\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}D(h))\\
- \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}.\nabla(\widetilde{u}+h) - (\widetilde{u}+h).\nabla\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{IV.2.22}$$

De nombreux termes sont beaucoup plus réguliers que ce qui est demandé. Si on écrit $\partial_t G_1 = f + g$ où f correspond aux termes de la première ligne de (IV.2.22) et g à ceux de la seconde ligne :

$$\begin{aligned}
f &= -\alpha^2\Delta\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\,\nabla\widetilde{\varphi} - \alpha^2\Delta\widetilde{\varphi}\,\nabla\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t} + \text{ div } \frac{\partial\widetilde{\sigma}}{\partial t} + 2\,\text{div } (\eta'(\widetilde{\varphi})\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}D(h)),\\
g &= -\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}.\nabla(\widetilde{u}+h) - (\widetilde{u}+h).\nabla\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Les termes de f vont être non seulement H^{-1} en espace mais aussi L^2, ce qui facilitera l'estimation du produit $G_1 \cdot f$. Commençons par l'estimation de f dans L^2. On utilise comme précédemment des résultats d'interpolation et de produits d'espaces de Sobolev (lemme III.2.6) qui permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\,\nabla\widetilde{\varphi}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le C\left\|\Delta\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CM_2^2,\\
&\left\|\Delta\widetilde{\varphi}\,\nabla\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le C\sqrt{T}\|\Delta\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\left\|\nabla\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^4(0,T;L^2)} \le C\sqrt{T}M_2^2,\\
&\left\|\operatorname{div}\frac{\partial\widetilde{\sigma}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le CT\left\|\frac{\partial\widetilde{\sigma}}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)} \le CTM_3.
\end{aligned}$$

En développant le terme $2\operatorname{div}(\eta'(\widetilde{\varphi})\partial_t\widetilde{\varphi}D(h))$, on a de la même manière

$$\left\|\operatorname{div}\left(\eta'(\widetilde{\varphi})\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}D(h)\right)\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le CTM_2^2\|h\|_3^2 + C\sqrt{T}M_2\|h\|_3^2.$$

Pour f, on a donc obtenu une estimation du type (on indique ici la dépendance de chaque constante car il est essentiel d'observer que celle devant M_2^2 ne dépend ni du temps T, ni des constantes M_i...) :

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le C(\Omega)M_2^2 + (\sqrt{T}+T)\;C(\Omega, M_1, M_2, M_3, \|h\|_3).$$

Les termes de g se majorent alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}.\nabla(\widetilde{u}+h)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} \le CT\left\|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\left\|\widetilde{u}+h\right\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CTM_1(M_1+\|h\|_2^2),\\
&\left\|(\widetilde{u}+h).\nabla\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} \le CT\left\|\widetilde{u}+h\right\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\left\|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;H^{-1})} \le CT(M_1+\|h\|_2^2)M_1.
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\|g\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} \le CTM_1(M_1+\|h\|_2^2).$$

En ajoutant les estimations de f à celle de g, on obtient $\partial_t G_1 \in L^2(0,T;H^{-1})$ avec l'inégalité :

$$\left\|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} \le C(\Omega)M_2^2 + (\sqrt{T}+T)\;C(\Omega, M_1, M_2, M_3, \|h\|_3). \tag{IV.2.23}$$

Quant au produit $G_1\cdot\partial_t G_1$, il s'écrit $G_1\cdot f + G_1\cdot g$. Puisque $G_1 \in L^2(0,T;H^1)$ et $f\in L^2(0,T;L^2)$, il est clair que $G_1\cdot f \in L^1(0,T;L^1)$ avec l'estimation :

$$\|G_1\cdot f\|^2_{L^1(0,T;L^1)} \le C\|G_1\|_{L^2(0,T;H^1)}\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}.$$

Pour ce qui est du produit $G_1\cdot g$, il suffit de remarquer qu'il s'écrit à l'aide de l'application trilinéaire b (voir le lemme III.2.2) :

$$G_1\cdot g = b\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}, \widetilde{u}+h, G_1\right) + b\left(\widetilde{u}+h, \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}, G_1\right).$$

Puisque $\partial_t\widetilde{u}$ et $\widetilde{u}+h$ sont tangents au bord du domaine et à divergence nulle, on utilise l'antisymétrie de b par rapport aux deux dernières variables (lemme III.2.2) :

$$G_1\cdot g = -b\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}, G_1, \widetilde{u}+h\right) - b\left(\widetilde{u}+h, G_1, \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\right) \in L^1(0,T;L^1).$$

Il en découle l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|G_1 \cdot g\|_{L^1(0,T;L^1)} &\le C\sqrt{T}\left\|\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;V_0)} |\nabla G_1|_{L^2(0,T;L^2)} |\widetilde{u}+h|_{L^\infty(0,T;V_0\cap H^2)}\\ &\le C\sqrt{T} M_2 \|G_1\|_{L^2(0,T;H^1)}.\end{aligned}$$

En additionnant l'estimation de $G_1 \cdot f$ ainsi que celle de $G_1 \cdot g$, on a :

$$\left\|G_1 \cdot \frac{\partial G_1}{\partial t}\right\|_{L^1(0,T;L^1)} \le C\|G_1\|_{L^2(0,T;H^1)}(\sqrt{T}M_2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}).$$

Concernant l'estimation de $|G_1(0)|_2^2$, on pourrait l'écrire comme un conséquence directe des estimations de G_1 dans $L^2(0,T;H^1)$ et de $\partial_t G_1$ dans $L^2(0,T;H^{-1})$. Ces estimation sera dépendant de T, ce que l'on ne souhaite pas ici (voir la remarque IV.2.1). On préfère écrire :

$$|G_1(0)|_2^2 \le C(\|\varphi_0\|_3^4 + \|\sigma_0\|_1^2 + \|u_0\|_2^4 + \|h\|_2^4 + \|h\|_2^2\|u_0\|_1^2 + \|h\|_2^2 + \|\varphi_0\|_3^2\|h\|_1^2).$$

Estimation de G_2 :
Pour le terme source de l'équation de type Cahn-Hilliard, les hypothèses du lemme IV.2.2 requièrent :

$$\begin{aligned}&G_2 \in L^2(0,T;L^2), \quad \text{div } G_2 \in L^2(0,T;H^2), \quad G_2.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\ &\text{div } \frac{\partial G_2}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2) \quad \text{et} \quad \text{div } G_2(0) \in L^2.\end{aligned}$$

Rappelons que $G_2 = -\widetilde{\varphi}\,(\widetilde{u}+h)$ donc $\text{div } G_2 = -(\widetilde{u}+h)\cdot\nabla\widetilde{\varphi}$. Il est clair que si $(\widetilde{u}+h,\widetilde{\varphi},\widetilde{\sigma}) \in R_T$ alors toutes ces estimations sont bien vérifiées (en utilisant en particulier le fait que $h\cdot n = 0$ sur le bord du domaine). Plus précisemment, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}&\|G_2\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le CT\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CTM_1M_2,\\ &\|\text{ div } G_2\|^2_{L^2(0,T;H^2)} \le CT\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CTM_1M_2,\\ &\left\|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}.\nabla\widetilde{\varphi}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le CT\left\|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \le CTM_1M_2,\\ &\left\|\widetilde{v}\cdot\nabla\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le C\sqrt{T}\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\left\|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^4(0,T;H^1)} \le C\sqrt{T}M_1M_2,\\ &|\text{ div } G_2(0)|_2^2 \le C(|u_0|_2^2 + |h|_2^2)\|\varphi_0\|_3^2.\end{aligned}$$

Estimation de G_3 :
Enfin, pour le troisième terme source, apparaissant dans le lemme IV.2.4 :

$$G_3 = \nu(\widetilde{\varphi})D(\widetilde{u}+h),$$

on a, pour $(r,s) = (\infty,1)$ ou $(r,s) = (2,2)$, l'inégalité

$$\begin{aligned}\|G_3\|^2_{L^r(0,T;H^s)} &\le \|\nu(\widetilde{\varphi})\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\|D(\widetilde{u})\|^2_{L^r(0,T;H^s)} + C\,\|\nu(\widetilde{\varphi})\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}\|D(h)\|_s^2\\ &\le \|\nu(\widetilde{\varphi})\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)}(M_1 + \|h\|_3^2).\end{aligned}$$

Afin de contrôler la norme de $\nu(\widetilde{\varphi})$ dans H^2 on utilise la même méthode que pour $\eta(\varphi)$ (voir l'estimation (IV.2.21)). On obtient

$$\|\nu(\widetilde{\varphi})\|_2^2 \le C(1+M_2^2).$$

On en déduit que, si $(\widetilde{u}+h, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma}) \in R_T$ alors $G_3 \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2)$ avec

$$\|G_3\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)} + \|G_3\|^2_{L^2(0,T;H^2)} \leq C\ (1+M_2^2)(M_1 + \|h\|_3^2).$$

Deux autres remarques sont nécessaires avant de pouvoir appliquer les trois lemmes. Tout d'abord, il faut vérifier que si $(\widetilde{u}+h, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma}) \in R_T$ alors $\nabla\widetilde{\varphi} \in L^\infty(0,T;H^2)$ et $\partial_t \widetilde{\varphi} \in L^2(0,T;L^\infty)$: ce sont les hypothèses qui sont nécessaires dans le lemme IV.2.1 pour montrer que $\widetilde{\eta} = \eta(\widetilde{\varphi})$ est assez régulier. On a

$$\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq C M_2,$$

et pour la seconde estimation, grâce à des résultats d'interpolation

$$[L^\infty(0,T;\Phi_0), L^2(0,T;\Phi_2)]_{1/4} = L^{8/3}(0,T;L^\infty),$$

on en déduit que $\partial_t\widetilde{\varphi} \in L^2(0,T;L^\infty)$ avec

$$\left\|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^\infty)} \leq T^{1/4}\left\|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^2_{L^{8/3}(0,T;L^\infty)} \leq CT^{1/4}\left\|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;\Phi_0)}\left\|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right\|^{3/2}_{L^2(0,T;\Phi_2)} \leq CT^{1/4}M_2.$$

La seconde remarque provient du lemme IV.2.2 dans lequel on a vu que même si la fonction “source” G_2 était définie sur $[0;T]$ alors la solution n'existe à coup sûr, que jusqu'à un temps $T_1 \leq T$. Pour contourner cet handicap, il suffit de choisir T assez petit. En effet, si T vérifie

$$T \leq \frac{1}{k_{20}(\|\varphi_0\|_4^2, CTM_1M_2)} \tag{IV.2.24}$$

alors, en utilisant l'inégalité $\|\,\mathrm{div}\ G_2\|^2_{L^2(0,T;H^2)} \leq CTM_1M_2$ et la croissance de k_{20} en chacune de ses variables, ceci implique

$$T \leq \frac{1}{k_{20}(\|\varphi_0\|_4^2, \|\,\mathrm{div}\ G_2\|^2_{L^2(0,T;H^2)})} = \frac{1}{\Lambda}.$$

Dorénavant, on prendra T assez petit pour vérifier cette condition (IV.2.24) et on pourra donc appliquer les résultats du lemme IV.2.2 sur $[0,T]$.

On a donc maintenant tout en main pour appliquer les trois lemmes IV.2.1, IV.2.2 et IV.2.4. En utilisant les estimations des termes sources G_1, G_2 et G_3, et le fait que toutes les fonctions k_i sont croissantes en chaque variable, on peut affirmer que $(v,\varphi,\sigma) \in R_T$ dès que

$$\begin{cases} k_1\Big(\|u_0\|_2^2,\ T\widetilde{C},\ M_2^2\widehat{C} + (\sqrt{T}+T)\widetilde{C},\ (\sqrt{T}+T)\widetilde{C},\ |G_1(0)|_2^2,\ M_2\widehat{C},\ T^{1/4}\widetilde{C}\Big) \leq M_1, \\ k_2\Big(\|\varphi_0\|_4^2,\ T\widetilde{C},\ T\widetilde{C},\ (\sqrt{T}+T)\widetilde{C},\ |\,\mathrm{div}\ (G_2(0))|_2^2\Big) \leq M_2, \\ k_3\Big(\|\sigma_0\|_2^2,\ C\ (1+M_2^2)(M_1+\|h\|_3^2),\ C\ (1+M_2^2)(M_1+\|h\|_3^2),\ M_1,\ \sqrt{T}M_1,\ \|h\|_3^2,\ M_2\Big) \leq M_3. \end{cases}$$

Dans ces estimations, on a introduit deux notations. Les constantes notées $\widehat{C}$ ne dépendent ni de T, ni de M_1, M_2 ou M_3 alors que les constantes $\widetilde{C}$ ne dépendent pas du temps T : $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\Omega,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ \|h\|_3)$.

En utilisant encore une fois la croissance des fonctions k_i en chaque variable ainsi que la non dépendance de ces fonctions par rapport au temps T, il est clair qu'il suffit de choisir trois constantes positives M_1, M_2 et M_3 vérifiant les inégalités strictes pour $T = 0$:

$$\begin{cases} k_1\Big(\|u_0\|_2^2,\ 0,\ M_2^2\widehat{C},\ 0,\ |G_1(0)|_2^2,\ M_2\widehat{C},\ 0\Big) < M_1, \\ k_2\Big(\|\varphi_0\|_4^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ |\operatorname{div} G_2(0)|_2^2\Big) < M_2, \\ k_3\Big(\|\sigma_0\|_2^2,\ C\,(1+M_2^2)(M_1+\|h\|_3^2),\ C\,(1+M_2^2)(M_1+\|h\|_3^2),\ M_1,\ 0,\ \|h\|_3^2,\ M_2\Big) < M_3. \end{cases}$$

Ainsi, on choisit successivement M_2, M_1 et M_3 vérifiant ces estimations, et enfin on en déduit l'existence d'un temps $T^* > 0$ tel que $\Theta(R_{T^*}) \subset R_{T^*}$.

Etape (iii)

Clairement R_T est convexe et fermé dans X_T. De plus, d'après le théorème d'Ascoli, R_T est relativement compact dans X_T, voir [81].

Montrons maintenant la continuité séquentielle de l'application Θ de R_T dans X_T : supposons que $(\widetilde{u}_n + h, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n)$ soit une suite de R_T convergeant vers $(\widetilde{u} + h, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma})$ dans X_T. Si on note $(u_n + h, \varphi_n, \sigma_n)$ et $(u + h, \varphi, \sigma)$ les images par Θ de $(\widetilde{u}_n + h, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n)$ et $(\widetilde{u} + h, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma})$ respectivement alors il suffit de montrer que $(u_n + h, \varphi_n, \sigma_n)$ converge vers $(u + h, \varphi, \sigma)$ dans X_T.

On montre d'abord que u_n converge vers u dans V_0. Les fonctions u_n et u sont définies par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - 2\operatorname{div}\,(\eta(\widetilde{\varphi}_n)D(u_n)) + \nabla p_n = G_1(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n), \quad \operatorname{div}\, u_n = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\operatorname{div}\,(\eta(\widetilde{\varphi})D(u)) + \nabla p = G_1(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma}), \quad \operatorname{div}\, u = 0. \end{cases}$$

En effectuant la différence, en posant $\bar{u} = u_n - u$ et en multipliant l'équation obtenue par $\bar{u}$, on en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\bar{u}|_2^2}{2}\right) + \eta_1|\nabla\bar{u}|_2^2 \le 2|\eta'|_\infty\|\widetilde{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_1\|\nabla u_n\|_1|\nabla\bar{u}|_2 + \int_\Omega (G_1(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n) - G_1(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma})).\bar{u},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\bar{u}|_2^2}{2}\right) + \frac{\eta_1}{2}|\nabla\bar{u}|_2^2 \le C\|\widetilde{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_1^2 + \|G_1(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n) - G_1(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma})\|_{-1}^2.$$

Il suffit alors de prouver que $G_1(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\sigma}_n)$ converge vers $G_1(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\sigma})$ dans H^{-1}. Pour ceci, on rappelle que G_1 est défini dans notre cas par :

$$G_1(u, \varphi, \sigma) = -\alpha^2\Delta\varphi\nabla\varphi + \operatorname{div}\,\sigma - (u + h)\cdot\nabla(u + h) + 2\operatorname{div}\,(\eta(\varphi)D(h)).$$

D'après la régularité de $\widetilde{\varphi}_n$, les suites $\Delta\widetilde{\varphi}_n$ et $\partial_t\Delta\widetilde{\varphi}_n$ sont bornées dans $L^\infty(0, T; \Phi_2)$ et $L^\infty(0, T; \Phi_{-2})$ respectivement. D'après les résultats dus à J. Simon [81], on en déduit que $\Delta\widetilde{\varphi}_n$ admet une limite dans H^2, qui par identification est égale à $\Delta\widetilde{\varphi}$. De même, $\nabla\widetilde{\varphi}_n$ converge vers $\nabla\widetilde{\varphi}$ dans H^3, , et ainsi le produit $\nabla\widetilde{\varphi}_n\ \Delta\widetilde{\varphi}_n$ converge vers $\nabla\widetilde{\varphi}\ \Delta\widetilde{\varphi}$ dans H^2. Les autres termes se traitent de la même manière, en remarquant en particulier que $\widetilde{u}_n$ converge vers $\widetilde{u}$ dans V_2 et que $\operatorname{div}\,\widetilde{\sigma}_n$ converge vers $\operatorname{div}\,\widetilde{\sigma}$ dans L^2.

On prouve ensuite que φ_n converge vers φ dans Φ_0. Les fonctions φ_n et φ sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t} - \operatorname{div}\,(B(\varphi_n)\nabla\mu_n) = \operatorname{div}\,(G_2(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n)), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \operatorname{div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = \operatorname{div}\,(G_2(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi})). \end{cases}$$

En effectuant la différence puis en multipliant par $\varphi_n - \varphi$, comme dans le cas de l'unicité du lemme IV.2.2 (exepté le membre de droite qui diffère dans les deux équations), il suffit de prouver que $G_2(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n)$ converge vers $G_2(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi})$ dans L^2. En revenant à la définition $G_2(u, \varphi) = -\varphi\,(u + h)$, il est clair que la méthode utilisée précédemment fournit le résultat.

Pour ce qui est de la convergence de σ_n vers σ dans L^2, le principe est identique : les équations définissant σ_n et σ étant linéaire, on peut remarquer qu'il sufit de prouver que $G_3(\widetilde{u}_n, \widetilde{\varphi}_n)$ converge vers $G_3(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi})$ dans L^2, ce qui résulte encore une fois des injections dues à J. Simon [81].

3 Preuve de l'unicité

Dans cette partie, on montre que la solution obtenue précédemment est unique dans la classe des fonctions régulières. Plus précisemment, on prouve le résultat :

Théorème IV.3.1
Soit $T > 0$. Le problème (IV.1.1) *admet au plus une solution $(u + h, \varphi, \sigma)$ dans la classe*

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty(0,T;V_1 \cap H^2) \cap L^2(0,T;V_1 \cap H^3), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;V_0) \cap L^2(0,T;V_1),\\
&\varphi \in L^\infty(0,T;\Phi_4) \cap L^2(0,T;\Phi_6), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^\infty(0,T;\Phi_0) \cap L^2(0,T;\Phi_2),\\
&\sigma \in L^\infty(0,T;H^2), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^1).
\end{aligned}$$

Preuve : Comme d'habitude, la méthode consiste à effectuer la différence entre les équations vérifiées par deux solutions $(v_1, \varphi_1, \sigma_1)$ et $(v_2, \varphi_2, \sigma_2)$ vivant dans la classe spécifiée par le théorème. Un calcul similaire a été mené dans le chapitre précédent. On a vu que les différences $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $v = v_1 - v_2$ et $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ vérifient pour tout $w \in V_1$, $\psi \in \Phi_3$ et tout $\tau \in H^1$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}.w &+ \int_\Omega (v \cdot \nabla v_1).w + \int_\Omega (v_2 \cdot \nabla v).w - \int_\Omega \operatorname{div} \sigma.w\\
&+ 2\int_\Omega (\eta(\varphi_1) - \eta(\varphi_2)) D(v_1) : D(w) + 2\int_\Omega \eta(\varphi_2) D(v) : D(w)\\
&= -\alpha^2 \int_\Omega (w \cdot \nabla \varphi_1)\Delta\varphi - \alpha^2 \int_\Omega (w \cdot \nabla\varphi)\Delta\varphi_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\psi &+ \int_\Omega (v \cdot \nabla\varphi_1)\psi + \int_\Omega (v_2 \cdot \nabla\varphi)\psi\\
&- \alpha^2 \int_\Omega (B(\varphi_1) - B(\varphi_2))\nabla\Delta\varphi_1 \cdot \nabla\psi - \alpha^2 \int_\Omega B(\varphi_2)\nabla\Delta\varphi \cdot \nabla\psi\\
&+ \int_\Omega (BF''(\varphi_1) - BF''(\varphi_2))\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\psi + \int_\Omega BF''(\varphi_2)\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \sigma}{\partial t} : \tau &+ \int_\Omega (v \cdot \nabla\sigma_1) : \tau + \int_\Omega (v_2 \cdot \nabla\sigma) : \tau + \int_\Omega l(\varphi_2)\sigma : \tau\\
&+ \int_\Omega (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))\sigma_1 : \tau + \int_\Omega (g(\sigma, \nabla v_1) + g(\sigma_2, \nabla v)) : \tau\\
&= \int_\Omega (\nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2)) D(v_1) : \tau + \int_\Omega \nu(\varphi_2) D(v) : \tau.
\end{aligned}$$

En prenant $(w, \psi, \tau) = (v, \Delta\varphi, \sigma)$ comme fonctions tests, on en déduit (voir la preuve de l'unicité dans le chapitre précédent : section 3.4) :

$$\frac{d}{dt}\left(|v|_2^2\right) + \eta_1|\nabla v|_2^2 \leq C(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\sigma|_2^2) + \frac{\alpha^4 B_1}{2}|\nabla\Delta\varphi|_2^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\varphi|_2^2\right) + \frac{\alpha^4 B_1}{2}|\nabla\Delta\varphi|_2^2 \leq C(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2) + C|\Delta^2\varphi_1|_2^{4/3}|\nabla\varphi|_2^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\sigma|_2^2\right) + l_1|\sigma|_2^2 \leq C(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\sigma|_2^2) + C|\sigma|_2^2(\|\sigma_1\|_2^2 + \|\sigma_2\|_2^2 + \|v_1\|_3 + \|v_1\|_2^2) + \frac{\eta_1}{2}|\nabla v|_2^2.$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient l'inégalité d'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\sigma|_2^2\right) \leq C\beta_4(t)\left(|v|_2^2 + |\nabla\varphi|_2^2 + |\sigma|_2^2\right)$$

où $\beta_4 = 1 + |\Delta^2\varphi_1|_2^{4/3} + \|\sigma_1\|_2^2 + \|\sigma_2\|_2^2 + \|v_1\|_3 + \|v_1\|_2^2$ est dans $L^1(0,T)$. Comme les valeurs initiales $v(0)$, $\varphi(0)$ et $\sigma(0)$ sont nulles, le lemme de Gronwall permet de conclure. ∎

4 Preuve de l'existence globale à données petites

Pour ce qui est de l'existence globale, on ne peut pas espérer obtenir de solutions fortes en dimension 3 compte tenu du fait que le problème n'est à l'heure actuelle pas résolu pour le seul problème de Navier-Stokes ! Dans le cas de la dimension 2, l'équation de Navier-Stokes n'est plus un obstacle, voir par exemple [25, 83] mais aucun résultat de type existence globale (avec données quelconques) n'ai connu pour les modèles monophasiques.

On va donc se restreindre ici au cas où les données sont petites. Dans ce cadre, les résultats connus actuellement sont plus nombreux non seulement concernant l'existence de solution forte globale pour l'équation de Navier-Stokes mais aussi pour un système couplant l'équation de Navier-Stokes et la loi constitutive d'Oldroyd (voir par exemple [33, 44]). Dans [44], C. Guillopé et J.C. Saut prouve l'existence globale à données petites en supposant en outre que le fluide est peu visco-élastique (ce qui revient pour nous à imposer ν petit). Dans [33], E.F. Cara, F. Guillen et R.R. Ortega s'affranchissent de cette hypothèse mais prouvent seulement une existence sur $[0, T]$ pour tout T (pour des données plus petites que $f(T)$, où f tend vers 0 lorsque T augmente...).

On va dans cette partie prouver que cette hypothèse de fluide "faiblement" visco-élastique peut être supprimée. D'autres travaux très récents [64] montrent (dans le cas monophasique seulement) par des méthodes différentes de celles proposées ici, que cette hypothèse est effectivement superflue. Par ailleurs, on se place toujours dans le cas diphasique et il faut donc supposer que les données en φ sont "petites". Plus précisément, lorsque l'on parlera de données petites, on supposera que φ_0 est proche d'une constante ω telle que $F''(\omega) > 0$ (cette hypothèse est classique, on dit que ω est un état métastable pour le potentiel F). On prouve alors (voir le théorème IV.1.2) :

Théorème IV.4.1
Supposons que $u_0 \in V_1 \cap H^2$, $\varphi_0 \in \Phi_4$, $\sigma_0 \in H^2$, η, B, l *et* ν *satisfait* (IV.1.2), F *satisfait* (IV.1.3), (IV.1.4), (IV.1.5) *et que* h *satisfait* (IV.1.6). *Soit* w *un point métastable pour le potentiel* F.

Si h, u_0, σ_0 *et* $\varphi_0 - \omega$ *sont assez petits dans leur espace alors le résultat du théorème IV.1.1 est vrai pour tout temps. De plus,* $\|u\|_2$, $\|\sigma\|_2$ *et* $\|\varphi - \omega\|_3$ *restent petit.*

Preuve : Par définition de ω, on a supposé que $F''(\omega) > 0$ ainsi que $B(\omega) > 0$. Les fonctions F et B étant régulières, on sait donc qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ω dans $\mathbb{R}$ sur lequel $F'' \geq 0$ et $B > 0$. On peut donc considérer des fonctions F_ω, B_ω telles que

$$\begin{aligned}
&1)\ F''_\omega = F'' \quad \text{et} \quad B_\omega = B \quad \text{sur } \mathcal{V},\\
&2)\ F \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R}^+), \quad B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^+),\\
&3)\ F_\omega(\omega) = 0,\ F'_\omega(\omega) = 0,\\
&4)\ F_\omega \text{ est convexe et toutes ses dérivées sont bornées sur } \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

Il est alors clair que B_ω satisfait (IV.1.2) et que F_ω vérifie les hypothèses (IV.1.3), (IV.1.4) et (IV.1.5). De plus, la convexité de F_ω implique que l'on peut choisir dans l'hypothèse (IV.1.5),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_1(x) = 1 \quad \text{et} \quad F_2(x) = 0.$$

Dans la suite de la preuve, on va travailler avec le problème modifié, c'est à dire en remplaçant B et F par B_ω et F_ω. Puisque l'on va montrer *a posteriori* que φ reste proche de ω (et plus précisement dans le voisinage $\mathcal{V}$), la solution obtenue pour le problème modifié sera aussi solution du problème initial (voir un argument analogue dans [8]).

On sait très bien que pour montrer une estimation à données petites, les termes non linéaires ne sont pas génants (x^2 étant contrôlé par x au voisinage de zéro !). C'est pour cette raison que l'on réécrit le système (IV.1.1) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - 2\,\text{div}\,(\eta(\varphi)D(u)) + \nabla p = \text{ div}\,\sigma + H_1,\\
&\text{div}\,u = 0,
\end{aligned} \tag{IV.4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v\cdot\nabla\sigma + l(\varphi)\sigma = \nu(\varphi)D(u) + H_3,\\
&v = u + h,
\end{aligned} \tag{IV.4.2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \text{ div}\,(B(\varphi)\nabla\mu) = \text{ div}\,(H_2),\\
&\mu = -\alpha^2\Delta\varphi + F'(\varphi),
\end{aligned} \tag{IV.4.3}$$

avec les conditions :

$$u(0) = u_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad u|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial\mu}{\partial n}\right|_\Gamma = 0,$$

et où l'on a défini :

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\alpha^2\Delta\varphi\nabla\varphi + v\cdot\nabla v + 2\,\text{div}\,(\eta(\varphi)D(h)),\\
H_2 &= -(u+h)\varphi,\\
H_3 &= g(\sigma,\nabla v) + \nu(\varphi)D(h).
\end{aligned}$$

On va commencer par démontrer des estimations d'énergie sur les solutions de (IV.4.1), (IV.4.2) et (IV.4.3) :

Etape 1 : Une première inégalité d'energie sur la vitesse.

Reprenons l'estimation de u dans $L^\infty(0,T;V_1)\cap L^2(0,T;V_1\cap H^2)$ (partie 2.1.1) obtenue en effectuant le produit scalaire de (IV.4.1) par Au. Elle s'écrit dans notre cas :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|_2^2}{2}\right) + \frac{\eta_1}{2}\|u\|_2^2 \leq C(|H_1|_2^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla u|_2^2) + C_1|\,\text{div}\,\sigma|_2^2. \tag{IV.4.4}$$

Etape 2 : A propos du modèle diphasique.

En fait, on peut voir qu'en utilisant les termes couplés $\operatorname{div}\sigma$ dans (IV.4.2) et $\nu(\varphi)D(u)$ dans (IV.4.1), on peut mieux faire : en effectuant les produits scalaires dans L^2 : $(\nu(\omega)\times$ (IV.4.1)$, u)$ et ((IV.4.2)$, \sigma)$, puis en les ajoutant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\nu(\omega)|u|_2^2+|\sigma|_2^2\Big)+\Big(\nu(\omega)\eta_1|\nabla u|_2^2+l_1|\sigma|_2^2\Big)\leq \int_\Omega \nu(\omega)H_1\cdot u+\int_\Omega H_3\cdot\sigma\\ +\int_\Omega \nu(\omega)\operatorname{div}(\sigma)\cdot u+\int_\Omega \nu(\varphi)D(u):\sigma\end{aligned}$$

A l'aide d'une intégration par parties, les termes couplés s'écrivent :

$$\int_\Omega \nu(\omega)\operatorname{div}(\sigma)\cdot u+\int_\Omega \nu(\varphi)D(u):\sigma=\int_\Omega(\nu(\varphi)-\nu(\omega))D(u):\sigma.$$

En utilisant le fait que (voir le lemme III.2.3) :

$$\begin{aligned}|\varphi-\omega|_\infty &\leq |\varphi-m(\varphi)|_\infty+|m(\varphi_0)-\omega|\\ &\leq C\|\varphi-m(\varphi)\|_2+|m(\varphi_0)-\omega|\\ &\leq C(|\Delta\varphi|_2+|\varphi_0-\omega|_\infty),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\nu(\omega)|u|_2^2+|\sigma|_2^2\Big)+C_2\Big(|\nabla u|_2^2+|\sigma|_2^2\Big)\\ \leq C(\|H_1\|_{-1}^2+|H_3|_2^2)+C(|\Delta\varphi|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)|\sigma|_2^2.\end{aligned}\tag{IV.4.5}$$

De la même manière, en dérivant par rapport au temps les deux équations (IV.4.1) et (IV.4.2), on montre un résultat similaire concernant $\partial_t u$ et $\partial_t\sigma$. La seule différence venant essentiellement des termes

$$2\operatorname{div}\Big(\eta'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}D(u)\Big)\quad\text{et}\quad \nu'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}D(u)$$

apparaissant respectivement lorsque l'on dérive les équations de Stokes et la loi d'Oldroyd. Multipliant le premier terme par $\partial_t u$ puis intégrant sur Ω, on trouve

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega \operatorname{div}\Big(\eta'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}D(u)\Big).\frac{\partial u}{\partial t}\Big| &\leq \Big|\int_\Omega \eta''(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\nabla\varphi.D(u)).\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\\ &\quad+\Big|\int_\Omega \eta'(\varphi)\Big(\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}.D(u)\Big).\frac{\partial u}{\partial t}\Big|+\frac12\Big|\int_\Omega \eta'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta u.\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\\ &\leq C\Big(\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big\|_2\|\nabla\varphi\|_2|D(u)|_2\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2+\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big\|_1\|D(u)\|_2\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2+\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big\|_1\|\Delta u\|_1\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2\Big)\\ &\leq C\Big(\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big\|_2^2\|\nabla\varphi\|_2^2+\|u\|_1^2\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2^2+\|u\|_3^2\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2+\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big\|_1^2\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_2\Big).\end{aligned}$$

Concernant le second terme, on le multiplie par $\partial_t\sigma$ puis on intègre sur Ω :

$$\Big|\int_\Omega \nu'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}D(u):\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big|\leq C\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_2\|u\|_3\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big|_2\leq C\Big(\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_2^2\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big|_2+\|u\|_3^2\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big|_2\Big).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\nu(\omega)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2+\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_2^2\right)&+C_3\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2+\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_2^2\right)\\ &\le C\left(\left\|\frac{\partial H_1}{\partial t}\right\|_{-1}^2+\left|\frac{\partial H_3}{\partial t}\right|_2^2+\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_2^2\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_2+\|u\|_3^2\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_2\right.\\ &\quad+\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|_1^2\|\sigma\|_1^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2\|\sigma\|_2^2+(|\Delta\varphi|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_2^2\\ &\quad\left.+\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|_1^2\|\nabla\varphi\|_2^2\|u\|_1^2+\|u\|_3^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2+\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|_1^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2\right).\end{aligned}\tag{IV.4.6}$$

Etape 3.1 : Contrôle de $\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}$.

Rappelons que $\mathbb{P}$ est le projecteur orthogonal de L^2 sur V_0. Nous allons maintenant obtenir une estimation sur $\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma$. Dans ce but, on commence par appliquer l'opérateur div à l'équation (IV.4.2). On applique ensuite la projection de Leray pour en déduire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma+\mathbb{P}(v\cdot\nabla\,\mathrm{div}\;\sigma)+l(\omega)\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma=&\mathbb{P}((l(\omega)-l(\varphi))\,\mathrm{div}\;\sigma)-\mathbb{P}(\nabla u:\nabla\sigma)\\ &-\mathbb{P}(l'(\varphi)\nabla\varphi.\sigma)+\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;H_3+\mathbb{P}(\nu'(\varphi)\nabla\varphi.D(u))\\ &+\mathbb{P}((\nu(\varphi)-\nu(\omega))\Delta u)+\nu(\omega)\mathbb{P}(\Delta u).\end{aligned}$$

D'autres parts, on estime $\mathbb{P}(\Delta u)$ en projetant l'équation (IV.4.1) :

$$\nu(\omega)\mathbb{P}(\Delta u)=\frac{\nu(\omega)}{\eta(\omega)}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\mathbb{P}((\eta(\varphi)-\eta(\omega))\Delta u)-\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma-\mathbb{P}H_1+2\mathbb{P}(\eta'(\varphi)\nabla\varphi.D(u))\right).$$

L'équation en $\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma$ devient alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma+\mathbb{P}(v\cdot\nabla\,\mathrm{div}\;\sigma)+\left(l(\omega)+\frac{\nu(\omega)}{\eta(\omega)}\right)\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma&=\mathbb{P}((l(\omega)-l(\varphi))\,\mathrm{div}\;\sigma)+\mathbb{P}(\nabla u:\nabla\sigma)\\ -\mathbb{P}(l'(\varphi)\nabla\varphi.\sigma)+\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;H_3+\mathbb{P}(\nu'(\varphi)\nabla\varphi.D(u))&+\mathbb{P}((\nu(\varphi)-\nu(\omega))\Delta u)\\ +\frac{\nu(\omega)}{\eta(\omega)}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\mathbb{P}((\eta(\varphi)-\eta(\omega))\Delta u)-\mathbb{P}H_1+2\mathbb{P}(\eta'(\varphi)\nabla\varphi.D(u))\right)&.\end{aligned}\tag{IV.4.7}$$

Lemme IV.4.1

Dans le membre de gauche, on a volontairement laissé le terme bilinéaire $\mathbb{P}(v\cdot\nabla\,\mathrm{div}\;\sigma)$ en espérant utiliser la relation d'orthoganilité $(v\cdot\nabla\tau,\tau)=0$ décrite dans le lemme III.2.2. On écrit :

$$\mathbb{P}(v\cdot\nabla\,\mathrm{div}\;\sigma)=(v\cdot\nabla)\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma+R.$$

On va montrer dans ce lemme que l'on peut majorer le reste de la façon suivante (voir [74] p.42)

$$|R|_2^2\le C\|\sigma\|_1^2|\nabla v|_\infty^2.$$

Preuve du lemme : On décompose $\mathrm{div}\;\sigma=T+\nabla q$ où T est à divergence nulle et tangent au bord de sorte que $\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma=T$. On a alors

$$\mathbb{P}((v\cdot\nabla)\,\mathrm{div}\;\sigma)=\mathbb{P}((v\cdot\nabla)T)+\mathbb{P}((v\cdot\nabla)\nabla q)=(v\cdot\nabla)T-(Id-\mathbb{P})((v\cdot\nabla)T)+\mathbb{P}((v\cdot\nabla)\nabla q),$$

avec les relations :

$$(v\cdot\nabla)\nabla q=\nabla((v\cdot\nabla)q)-\nabla v\cdot\nabla q\quad\text{donc}\quad\mathbb{P}(v\cdot\nabla)\nabla q)=-\mathbb{P}(\nabla v\cdot\nabla q),$$

$$(v\cdot\nabla)T-(T\cdot\nabla)v\in V_0 \quad \text{donc} \quad (Id-\mathbb{P})((v\cdot\nabla)T)=(Id-\mathbb{P})((T\cdot\nabla)v).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((v\cdot\nabla)\,\mathrm{div}\,\sigma) &= (v\cdot\nabla)T-(Id-\mathbb{P})((T\cdot\nabla)v)-\mathbb{P}(\nabla v\cdot\nabla q),\\ &= (v\cdot\nabla)T-(Id-\mathbb{P})((\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma\cdot\nabla)v)-\mathbb{P}(\nabla v.(\,\mathrm{div}\,\sigma-\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma))\end{aligned}$$

L'estimation du reste est alors immédiate. ■

On multiplie (IV.4.7) par $\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma$ puis on intègre. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2\Big)+\widetilde{C}|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2 \le C\Big(&(\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)(\|\sigma\|_1^2+\|u\|_2^2)\\ &+\|v\|_3^2\|\sigma\|_1^2+|\,\mathrm{div}\,H_3|_2^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2+|H_1|_2^2\Big).\end{aligned} \tag{IV.4.8}$$

Etape 3.2 : Contrôle de Au.
Puisque l'on a

$$Au=\frac{1}{\eta(\omega)}\Big(-\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbb{P}((\eta(\varphi)-\eta(\omega))\Delta u)+\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma+\mathbb{P}H_1-2\mathbb{P}(\eta'(\varphi)\nabla\varphi.D(u))\Big), \tag{IV.4.9}$$

une estimation sur $|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2$ permet d'en avoir une sur $|Au|_2$ et donc par régularité de l'opérateur de Stokes (lemme III.2.9), une borne sur $\|u\|_2$:

$$\|u\|_2^2\le C\Big(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2+(|\Delta\varphi|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)\|u\|_2^2+|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2+|H_1|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^2\|u\|_1^2\Big). \tag{IV.4.10}$$

Etape 3.3 : Contrôle de σ.
On fait l'opération suivante : $(\nabla(\text{IV.4.2}),\nabla\sigma)$ de façon à trouver :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{|\nabla\sigma|_2^2}{2}\Big)+l_1|\nabla\sigma|_2^2\le C(|\nabla v|_\infty^2|\nabla\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla u|_2^2+|\nabla H_3|_2^2)+C\|u\|_2^2.$$

Mais en utilisant l'estimation concernant $\|u\|_2$ (inégalité (IV.4.10)), on a aussi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla\sigma|_2^2\Big)+2l_1|\nabla\sigma|_2^2 &\le C(|\nabla v|_\infty^2|\nabla\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla u|_2^2+|\nabla H_3|_2^2)\\ &+C\Big(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2+(|\Delta\varphi|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)\|u\|_2^2+|H_1|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^2\|u\|_1^2\Big)+\widehat{C}|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2.\end{aligned} \tag{IV.4.11}$$

On peut alors absorber le terme $\widehat{C}|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2$ en faisant la somme $2\widehat{C}$(IV.4.8) $+\;\widetilde{C}$(IV.4.11). On obtient une estimation du type :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla\sigma|_2^2+|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2\Big)+C\Big(|\nabla\sigma|_2^2+|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma|_2^2\Big)\le C\Big(&\|v\|_3^2\|\sigma\|_1^2+\|H_3\|_1^2+|H_1|_2^2\\ &+(\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)(\|\sigma\|_1^2+\|u\|_2^2)\Big)+C\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2.\end{aligned} \tag{IV.4.12}$$

Etape 4 : Et on refait un tour...

Avec des arguments similaires à ceux présentés dans les étapes précédentes, on commence par appliquer $\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}$ à l'équation (IV.4.2). D'après $\nabla\mathbb{P}$(IV.4.1) on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2}{2}\right)+\left(l(\omega)+\frac{\nu(\omega)}{\eta(\omega)}\right)|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2\leq C\Bigg((\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)(\|\sigma\|_2^2+\|u\|_3^2)$$
$$+\|\nabla\varphi\|_2^4(|\sigma|_2^2+\|u\|_1^2)+\|v\|_3^2\|\sigma\|_2^2+|\nabla\;\mathrm{div}\;H_3|_2^2+\left|\frac{\partial\,\nabla u}{\partial t}\right|_2^2+|\nabla H_1|_2^2\Bigg).$$

Remarque IV.4.1

Au cours de ce ce calcul, on sait seulement que $\sigma\in L^\infty(H^2)$. Il ne nous est pas autorisé a priori *d'effectuer l'opération $\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;(u\cdot\nabla\sigma)$. En fait, ceci est justifié par régularisation comme nous l'avons fait au cours de la preuve du lemme d'Oldroyd, partie 2.3.1. L'existence de solution régulière étant prouvée par la méthode des caractéristiques.*

Ensuite, on peut obtenir une estimation pour $\|u\|_3$ par régularité du problème de Stokes. D'après l'égalité (IV.4.9), on trouve :

$$\begin{aligned}\|u\|_3^2\leq C_0\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2+|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2\right)&\\+C((\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)\|u\|_3^2+|\nabla H_1|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^4\|u\|_1^2).&\end{aligned}\tag{IV.4.13}$$

En calculant $(\nabla\nabla(\text{IV.4.2}),\nabla\nabla\sigma)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(|\nabla\nabla\sigma|_2^2\right)+2l_1|\nabla\nabla\sigma|_2^2\leq C(|\nabla v|_\infty^2\|\nabla\sigma\|_1^2+|\nabla\varphi|_\infty^2|\nabla\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^4|\sigma|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^2\|u\|_3^2+|\nabla H_3|_2^2)$$
$$+C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2+\|\nabla\varphi\|_2^2\|u\|_3^2+|\nabla H_1|_2^2+|\nabla\varphi|_\infty^4\|u\|_1^2\right)+C|\mathbb{P}\nabla\;\mathrm{div}\;\sigma|_2^2,$$

ce qui combiné à l'estimation de $|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2$ donne :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(|\nabla\nabla\sigma|_2^2+|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2\right)+C\left(|\nabla\nabla\sigma|_2^2+|\nabla\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma|_2^2\right)\\&\qquad\leq C\Bigg(\|H_3\|_2^2+\|H_1\|_1^2+\|v\|_3^2\|\sigma\|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^4(|\sigma|_2^2+\|u\|_1^2)\\&\qquad\qquad+(\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)(\|\sigma\|_2^2+\|u\|_3^2)\Bigg)+C\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2.\end{aligned}\tag{IV.4.14}$$

Ainsi, en ajoutant (IV.4.12) et (IV.4.14) on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\sigma\|_1^2+\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma\|_1^2\right)+C_4\left(\|\nabla\sigma\|_1^2+\|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\;\sigma\|_1^2\right)\\&\qquad\leq C\Bigg(\|H_3\|_2^2+\|H_1\|_1^2+\|v\|_3^2\|\sigma\|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^4(|\sigma|_2^2+\|u\|_1^2)\\&\qquad\qquad+(\|\nabla\varphi\|_2^2+|\varphi_0-\omega|_\infty^2)(\|\sigma\|_2^2+\|u\|_3^2)\Bigg)+C_5\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2.\end{aligned}\tag{IV.4.15}$$

Etape 5 : Estimation sur l'équation de Cahn-Hilliard.

Cette équation (IV.4.3) a été étudiée lors de la preuve du théorème d'existence locale (théorème IV.1.1), plus précisement dans la partie 2.2. Dans le cas présent, on peut utiliser le fait que le potentiel est convexe, c'est à dire que $F_2(m(\varphi_0)) = 0$. De plus, ce potentiel ainsi que toutes ses dérivées étant bornés, l'estimation (IV.2.16) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\varphi\|_3^2 + \frac{2}{\alpha^2}\int_\Omega F(\varphi)\right) + C\left(\|\nabla\varphi\|_5^2 + \frac{2}{\alpha^2}\int_\Omega F(\varphi) + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_2^2\right) \\ \leq C(\|\nabla\varphi\|_3^4 + \|\nabla\varphi\|_3^8 + \|\operatorname{div} H_2\|_2^2). \tag{IV.4.16}$$

Etape 6 : Estimation des termes source.

Avant de regrouper toutes les inégalités obtenues, il faut estimer les termes H_1, H_2 et H_3. Un calcul assez rapide (utilisant essentiellement des produits d'espaces de Sobolev, lemme III.2.6 comme lors de la preuve du théorème d'existence locale) montre que :

$$\begin{aligned}
&\|H_1\|_1^2 \leq C(\|u\|_1^2\|u\|_3^2 + \|\nabla\varphi\|_2^4 + \|u\|_2^2\|h\|_2^2 + \|h\|_2^4 + (1+\|\nabla\varphi\|_1^4)\|h\|_3^2),\\
&\|\operatorname{div} H_2\|_2^2 \leq C(\|u\|_2^2\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|h\|_2^2\|\nabla\varphi\|_2^2),\\
&\|H_3\|_2^2 \leq C(\|\sigma\|_2^2\|u\|_3^2 + \|\sigma\|_2^2\|h\|_3^2 + (1+\|\nabla\varphi\|_1^4)\|h\|_3^2),
\end{aligned}$$

et pour ce qui est des dérivées en temps :

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial H_1}{\partial t}\right\|_{-1}^2 \leq C\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_2^2\|u\|_2^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_1^2\|\nabla\varphi\|_2^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_1^2\|h\|_2^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2\|h\|_1^2\right),\\
&\left|\frac{\partial H_3}{\partial t}\right|_2^2 \leq C\left(\left|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right|_2^2\|u\|_3^2 + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right|_2^2\|h\|_3^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1^2\|\sigma\|_2^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_1^2\|h\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

Etape 7 : Bilan et conclusion.

En effectuant la somme des estimations trouvées lors des 5 premières étapes :

$$\frac{C_4}{2C_1}\times\text{(IV.4.4)} + \text{(IV.4.5)} + \frac{C_4+C_5}{C_3}\times\text{(IV.4.6)} + \frac{C_4}{2C_0}\times\text{(IV.4.13)} + \text{(IV.4.15)} + \text{(IV.4.16)}$$

ainsi qu'en utilisant les bornes ci-dessus pour les termes H_i, on obtient une inéquation différentielle du type

$$y' + C\,z \leq \ z\,f(y) + C_{11}\,z + C_{12}, \quad 0 \leq y \leq z$$

avec (en oubliant les constantes !)

$$\begin{aligned}
&y = \|u\|_1^2 + \|\sigma\|_2^2 + |\partial_t u|_2^2 + |\partial_t\sigma|_2^2 + \|\mathbb{P}\operatorname{div}\sigma\|_1^2 + \|\nabla\varphi\|_3^2 + \int_\Omega F(\varphi),\\
&z = \|u\|_3^2 + \|\sigma\|_2^2 + \|\partial_t u\|_1^2 + |\partial_t\sigma|_2^2 + \|\mathbb{P}\operatorname{div}\sigma\|_1^2 + \|\nabla\varphi\|_5^2 + \|\partial_t\varphi\|_2^2 + \int_\Omega F(\varphi),\\
&C_{11} = \|h\|_3^2 + |\varphi_0-\omega|_\infty^2 \quad \text{et} \quad C_{12} = \|h\|_3^2 + \|h\|_2^4.
\end{aligned}$$

La fonction f est continue et nulle en zéro (en fait, le produit $zf(y)$ contient tous les termes non linéaires).

Le lemme suivant prouve que si $y(0)$, C_{11} et C_{12} sont assez petits alors y reste petit sur l'intervalle $[0,T^*]$. Par conséquent, $y(T^*)$ est petit et on peut à nouveau utiliser le théorème d'existence IV.1.1 sur $[T^*,2T^*]$ (il faut noter que les constantes utilisées dans les estimations ne dépendent pas de T^*). En répétant cet argument sur tout intervalle $[0,nT^*]$, $n\in\mathbb{N}$, on prouve que :

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty(\mathbb{R}^+;V_1)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;V_1\cap H^3), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(\mathbb{R}^+;V_0)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;V_1),\\
&\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^+;\Phi_4)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\Phi_6), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\Phi_2),\\
&\sigma\in L^\infty(\mathbb{R}^+;H^2), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}\in L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2).
\end{aligned}$$

Il suffit alors pour conclure de montrer que :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V_1 \cap H^2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \Phi_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1).$$

Pour prouver que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V_1 \cap H^2)$, on procède comme dans la preuve du lemme IV.2.1 : on écrit d'abord

$$\nabla p = -\alpha^2 \Delta\varphi \nabla\varphi + \operatorname{div} \sigma - v \cdot \nabla v + 2 \operatorname{div} (\eta(\varphi) D(v)) - \frac{\partial u}{\partial t}$$

ce qui implique que $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2/\mathbb{R})$. Ensuite, réécrivant la même équation en faisant apparaitre l'opérateur de Stokes Au, on obtient le résultat désiré (voir la dernière partie du paragraphe 2.1.1).

D'après l'estimation (IV.2.17) avec $\operatorname{div} G_2 = v \cdot \nabla\varphi$, il est très facile de conclure en ce qui concerne la quantité $\partial_t \varphi$. De même, l'estimation (IV.2.20) avec $G_3 = \nu(\varphi) D(v)$ permet d'obtenir le résultat au sujet de la dérivée $\partial_t \sigma$. ∎

Lemme IV.4.2
Soient y et z deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $[0, T]$ et vérifiant :

$$y' + \alpha\, z \leq \; z\, f(y) + \beta, \quad 0 \leq y \leq z.$$

Supposons que f soit continue et $f(0) = 0$, α et β étant deux constantes positives. Soit M un réel positif tel que $f(M) < \alpha/2$. Si $\beta < M\alpha/2$ alors :

$$y(0) < M \quad \Longrightarrow \quad y < M \text{ sur } [0, T].$$

Preuve du lemme IV.4.2 : Raisonnons par l'absurde en supposant que "$y < M$ sur $[0, T]$" ne soit pas vraie. On pose $\overline{T} = \inf\{t \in [0, T],\ y(t) > M\}$. On a alors $y(\overline{T}) = M$ et $y'(\overline{T}) \geq 0$. De plus, en évaluant l'inéquation différentielle en $\overline{T}$, on trouve :

$$y'(\overline{T}) \leq z(\overline{T})(f(M) - \alpha) + \beta.$$

Puisque $z(\overline{T}) \geq y(\overline{T}) = M$ et d'après le choix de M on a $y'(\overline{T}) < 0$. Ce qui fournit une contradiction. ∎

5 Résultats de régularité

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux propriétés de forte régularité des solutions, en supposant au préalable que les données initiales ainsi que l'ouvert Ω sont suffisamment régulières. On démontre ici un théorème de solutions très régulières dans le cas monophasique en prenant par exemple $\varphi = 1$ dans (IV.1.1). Il y a deux raisons pour le faire ici : d'un part, les preuves d'un tel résultat sont essentiellement identiques à la preuve du théorème d'existence locale IV.1.1. D'autre part, de tels résultats seront utilisés au cours du chapitre suivant, concernant uniquement le problème monophasique. On étudie donc le problème monophasique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = \operatorname{div} \sigma, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + u \cdot \nabla\sigma + g(\sigma, \nabla u) + \sigma = D(u), \\ u(0) = u_0,\ \sigma(0) = \sigma_0, \quad u|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{IV.5.1}$$

Au cours de cette partie, on notera $f^{(s)}$ la dérivée $\dfrac{\partial^s f}{\partial t^s}$. Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ on dira que les données (u_0, σ_0) sont compatibles si, pour tout $s \leq k/2$,

$$u_0^{(s)} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \tag{IV.5.2}$$

où $u_0^{(s)}$ est défini par récurrence sur s :

$$\begin{cases} u_0^{(s)} = \mathbb{P}\,\mathrm{div}\,\sigma_0^{(s-1)} - \displaystyle\sum_{r=0}^{s-1} C_{s-1}^r\,\mathbb{P}(u_0^{(s-1-r)}\cdot\nabla u_0^{(r)}) - Au_0^{(s-1)}, \\ \sigma_0^{(s-1)} = D(u_0^{(s-2)}) - \displaystyle\sum_{r=0}^{s-2} C_{s-2}^r\,u_0^{(s-2-r)}\cdot\nabla\sigma_0^{(r)} - \sum_{r=0}^{s-2} C_{s-2}^r\,g(\sigma_0^{(s-2-r)},\nabla u_0^{(r)}) + \sigma_0^{(s-2)}. \end{cases}$$

On est ainsi en position d'énoncer le théorème de régularité :

Théorème IV.5.1
Soit $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Si $u_0\in H^k\cap V_1$ et $\sigma_0\in H^k$ vérifient les relations de compatibilité (IV.5.2) *alors il existe $T^*>0$ tel que le problème* (IV.5.1) *admette une solution (u,σ) vérifiant :*

$$u\in L^\infty(0,T^*;H^k\cap V_1)\cap L^2(0,T^*;H^{k+1}\cap V_1) \quad \textit{et} \quad \sigma\in L^\infty(0,T^*;H^k).$$

De plus, la solution satisfait les estimations sur les dérivées en temps suivantes :

$$\forall s\in\mathbb{N}, 1\leq s\leq\frac{k}{2},\ u^{(s)}\in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s}\cap V_0)\cap L^2(0,T^*;H^{k-2s+1}\cap V_0),$$
$$\forall s\in\mathbb{N}, 1\leq s\leq\frac{k}{2},\ \sigma^{(s)}\in L^\infty(0,T^*;H^{k-2s+1}).$$

La démarche est exactement identique à la preuve du théorème dans le cas $s=0$. On commence par énoncer deux lemmes concernant deux problèmes linéaires liés au système. Le premier, pour lequel on ne donnera pas la preuve, est montré dans [13] ainsi que dans [85].

Lemme IV.5.1
Soit $k\geq 2$. Si on suppose que K_1 et u_0 vérifient les hypothèses suivantes :

- $K_1^{(s)}\in L^2(0,T;H^{k-2s-1})$ *pour tout* $s\in\mathbb{N}$, $s\leq\dfrac{k}{2}$,
- $u_0\in V_1\cap H^k$,
- $u_0^{(s)}=0$ *sur* Γ *pour tout* $s\in\mathbb{N}$, $s\leq\dfrac{k}{2}$ *où* $u_0^{(s)}$ *est défini par* $u_0^{(s)}=\mathbb{P}K_{1_{t=0}}^{(s-1)}-Au_0^{(s-1)}$,

alors il existe une unique solution (u,p) au problème de Stokes suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = K_1, \quad \mathrm{div}\, u = 0, \\ u(0)=u_0, \quad u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Cette solution vérifie, pour tout $s\in\mathbb{N}$, $s\leq\dfrac{k}{2}$,

$$\|u^{(s)}\|^2_{L^\infty(0,T;V_0\cap H^{k-2s})} + \|u^{(s)}\|^2_{L^2(0,T;V_0\cap H^{k-2s+1})} \leq f_s(\|u_0\|_k, \|K_1^{(s)}\|_{L^2(0,T;H^{k-2s-1})}).$$

Lemme IV.5.2
Soit $k\geq 2$. Si K_2, $\widetilde{u}$ et σ_0 vérifient

- $K_2\in L^1(0,T;H^k)$, $K_2^{(s)}\in L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})$ *pour* $s\in\mathbb{N}$, $s\leq\dfrac{k}{2}$,
- $\widetilde{u}\in L^1(0,T;V_1\cap H^{k+1})$, $\widetilde{u}^{(s)}\in L^\infty(0,T;V_0\cap H^{k-2s})$ *pour* $s\in\mathbb{N}$, $s\leq\dfrac{k}{2}$,
- $\sigma_0\in H^k$,

alors le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \widetilde{u} \cdot \nabla \sigma + g(\sigma, \nabla \widetilde{u}) + \sigma = K_2, \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{cases} \tag{IV.5.3}$$

admet une unique solution $\sigma \in L^\infty(0,T;H^k)$ *avec l'estimation*

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^k)} \leq (\|\sigma_0\|_k + \|K_2\|_{L^1(0,T;H^k)})e^{C\|\widetilde{u}\|_{L^1(0,T;V_1\cap H^{k+1})}}.$$

Concernant l'estimation des dérivées en temps, on a aussi, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq \dfrac{k}{2}$,

$$\begin{aligned} \|\sigma^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s+1})} \leq g_s(\|\sigma_0\|_k, \|K_2\|_{L^1(0,T;H^k)}, \|\widetilde{u}\|_{L^1(0,T;V_1\cap H^{k+1})}, \\ \|K_2^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s-2})}, \|\widetilde{u}\|_{L^\infty(0,T;V_1\cap H^{k-1})}, \\ \|\widetilde{u}^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;V_0\cap H^{k-2s-2})}). \end{aligned} \tag{IV.5.4}$$

Preuve : Exactement comme dans le lemme IV.2.4, partie 2.3, l'existence et l'unicité d'une solution régulière découle de la méthode des caractéristiques. On prouve ici seulement les estimations en commençant par celle concernant σ.

Etape 1 : Estimation de σ.
En prenant le produit scalaire dans H^k : $<$ (IV.5.3)$, \sigma >_k$ on a

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_k^2 + \|\sigma\|_k^2 \leq \|K_2\|_k\|\sigma\|_k + | < \widetilde{u} \cdot \nabla\sigma, \sigma >_k | + | < g(\sigma, \nabla\widetilde{u}), \sigma >_k |.$$

On utilise ensuite le fait que en dimension $d < 4$, l'espace H^k est une algèbre multiplicative dès que $k \geq 2$ (lemme III.2.6). On en déduit :

$$| < g(\sigma, \nabla\widetilde{u}), \sigma >_k | \leq C\|\sigma\|_k^2\|\widetilde{u}\|_{k+1}.$$

Les propriétés de continuité et d'orthogonalité de l'application trilinéaire $(u \cdot \nabla v, w)$ (voir le lemme III.2.2) montrent que :

$$| < \widetilde{u} \cdot \nabla\sigma, \sigma >_k | \leq C\|\sigma\|_k^2\|\widetilde{u}\|_{k+1}.$$

On peut alors établir que :

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_k^2 + \|\sigma\|_k^2 \leq \|K_2\|_k\|\sigma\|_k + C\|\sigma\|_k^2\|\widetilde{u}\|_{k+1}.$$

Après avoir divisé par $\|\sigma\|_k$ et utilisé le lemme de Gronwall, on trouve l'estimation voulue :

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^k)} \leq (\|\sigma_0\|_k + \|K_2\|_{L^1(0,T;H^k)})e^{C\|\widetilde{u}\|_{L^1(0,T;V_1\cap H^{k+1})}}.$$

Pour les estimations sur les dérivées $\sigma^{(s)}$ pour $1 \leq s \leq \dfrac{k}{2}$, on procède par récurrence sur l'entier s.

Etape 2 : Initialisation de la récurrence ($s = 1$).
Lorsque $s = 1$, en écrivant la loi constitutive sous la forme :

$$\sigma^{(1)} = K_2 - \widetilde{u} \cdot \nabla\sigma - g(\sigma, \nabla\widetilde{u}) - \sigma,$$

le lemme III.2.6 concernant les produits d'espaces de Sobolev permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|\sigma^{(1)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-1})} \leq \|K_2\|_{L^\infty(0,T;H^{k-1})} + \|\widetilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H^k)}\|\nabla\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^{k-1})} \\ + C\|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^k)}\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-1})} + \|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^k)}. \end{aligned}$$

L'estimation sur σ réalisée lors de la première étape permet de conclure le cas $s = 1$.

Etape 3 : La récurrence.
Supposons maintenant l'estimation (IV.5.4) vraie pour tout $s' \leq s$. L'étape suivante consiste à prouver l'estimation pour $s+1$ (tant que $s+1 \leq k/2$). Par dérivation successive de (IV.5.3) par rapport au temps, on trouve :

$$\sigma^{(s+1)} = K_2^{(s)} - \sigma^{(s)} - \sum_{r=0}^{s} C_s^r\, \widetilde{u}^{(s-r)} \cdot \nabla \sigma^{(r)} - \sum_{r=0}^{s} C_s^r\, g(\sigma^{(r)}, \nabla \widetilde{u}^{(s-r)}).$$

Par hypothèse générale, on sait que $K_2^{(s)} \in L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})$. Par hypothèse de récurrence, on sait aussi que $\sigma^{(s)} \in L^\infty(0,T;H^{k-2s+1})$. Pour ce qui est des autres termes, on utilise à nouveau les propriétés de produits d'espaces de Sobolev (lemme III.2.6). Les termes du type $\widetilde{u}^{(s-r)} \cdot \nabla \sigma^{(r)}$ s'écrivent :

$$\|\widetilde{u}^{(s-r)} \cdot \nabla \sigma^{(r)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})} \leq \|\widetilde{u}^{(s-r)}\|_{L^\infty(0,T;V_1 \cap H^{k-2(s-r)})} \|\sigma^{(r)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2r-1})},$$

et de la même manière, le dernier terme se majore ainsi :

$$\|g(\sigma^{(r)}, \nabla \widetilde{u}^{(s-r)})\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})} \leq C \|\sigma^{(r)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2r})} \|\widetilde{u}^{(s-r)}\|_{L^\infty(0,T;V_0 \cap H^{k-2(s-r)-1})}.$$

On en déduit donc que $\sigma^{(s+1)}$ est borné dans $H^{k-2s-1} = H^{k-2(s+1)+1}$ et que cette borne dépend continuement des données et des normes de $\sigma^{(r)}$ dans H^{k-2r} pour $r \leq s$. Le raisonnement par récurrence permet alors de conclure la preuve. ∎

Preuve du théorème de régularité IV.5.1 : Cette preuve est très proche de celle réalisée dans le cas moins régulier, voir le théorème IV.1.1. On considère le système (IV.5.1) comme un point fixe :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = K_1, \qquad \text{div}\, u = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \widetilde{u} \cdot \nabla \sigma + g(\sigma, \nabla \widetilde{u}) + \sigma = K_2, \\ u(0) = u_0,\ \sigma(0) = \sigma_0, \quad u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

où $K_1 = -\widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} + \text{ div } \widetilde{\sigma}$ et $K_2 = D(\widetilde{u})$. Ainsi, un point fixe de l'application Θ qui à $(\widetilde{u}, \widetilde{\sigma})$ associe la solution (u, σ) des équations ci-dessus est solution du problème initial (IV.5.1). Considérons donc $S_T(N_1, N_2)$ le sous-espace de $C([0,T];V_0) \times C([0,T];L^2)$ défini par :

$$\begin{aligned} S_T(N_1,N_2) = \Big\{ & (u,\sigma) \in C([0,T];V_0) \times C([0,T];L^2) \quad \text{tel que} \\ & \forall s \in \mathbb{N},\ s \leq k/2, \quad u^{(s)} \in L^\infty(0,T;V_0 \cap H^{k-2s}) \cap L^2(0,T;V_1 \cap H^{k-2s+1}), \\ & \sigma \in L^\infty(0,T;H^k) \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq k/2, \quad \sigma^{(s)} \in L^\infty(0,T;H^{k-2s+1}), \\ & u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \\ & \forall s \in \mathbb{N},\ s \leq k/2, \quad \|u^{(s)}\|^2_{L^\infty(0,T;V_0 \cap H^{k-2s})} + \|u^{(s)}\|^2_{L^2(0,T;V_0 \cap H^{k-2s+1})} \leq N_1, \\ & \|\sigma\|_{L^\infty(0,T;H^k)} \leq N_2 \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq k/2, \quad \|\sigma^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s+1})} \leq N_2 \Big\}. \end{aligned}$$

L'étape essentielle est de montrer que l'on peut appliquer les deux lemmes précédents. En ce qui concerne le premier, on doit montrer que si $\widetilde{u}$ et $\widetilde{\sigma}$ sont dans $S_T(N_1, N_2)$ alors $K_1 = -\widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} + \text{ div } \widetilde{\sigma}$ est assez régulier. Pour ce qui est du terme div $\widetilde{\sigma}$ on a clairement, pour tout $s \leq k/2$ (y compris pour $s = 0$),

$$\|\text{ div } \widetilde{\sigma}^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})} \leq N_2. \tag{IV.5.5}$$

Pour l'autre terme, on écrit :

$$(\widetilde{u}\cdot\nabla\widetilde{u})^{(s)}=\sum_{r=0}^{s}C_s^r\,\widetilde{u}^{(r)}\cdot\nabla\widetilde{u}^{(s-r)}$$

avec $\widetilde{u}^{(r)}\in L^\infty(0,T;V_0\cap H^{k-2r})$ et $\nabla\widetilde{u}^{(s-r)}\in L^4(0,T;V_0\cap H^{k-2(s-r)-1/2})$, ce dernier résultat se déduisant par interpolation. D'après le lemme III.2.6, on montre alors que le produit vérifie :

$$\|(\widetilde{u}\cdot\nabla\widetilde{u})^{(s)}\|_{L^4(0,T;H^{k-2s-1})}\leq CN_1^2. \tag{IV.5.6}$$

On en déduit alors, grâce aux inégalités (IV.5.5) et (IV.5.6) que pour tout $s\leq k/2$:

$$\|K_1^{(s)}\|_{L^2(0,T;H^{k-2s-1})}\leq TN_2+C\sqrt{T}N_1^2.$$

Pour appliquer le second lemme, on doit montrer d'un part que $\widetilde{u}$ satisfait les hypothèses requises, que d'autre part K_2 est dans $L^1(0,T;H^k)$ avec $K_2^{(s)}\in L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})$. En ce qui concerne ce dernier point, on a

$$\|K_2\|_{L^2(0,T;H^k)}+\|K_2^{(s)}\|_{L^\infty(0,T;H^{k-2s-1})}\leq N_1.$$

On est donc en mesure d'appliquer les deux lemmes IV.5.1 et IV.5.2 : si $(\widetilde{u},\widetilde{\sigma})\in S_T(N_1,N_2)$ alors son image par Θ est dans $S_T(N_1,N_2)$ pour un temps $T>0$ assez petit dès que

$$f_s(\|u_0\|_k,0)<N_1,\quad g_s(\|\sigma_0\|_k,0,0,N_1,N_1,N_1)<N_2\quad \text{pour } s\in\mathbb{N},\ s\leq k/2.$$

En choisissant successivement N_1 puis N_2 on trouve un temps $T>0$ pour lequel $S_T(N_1,N_2)$ est stable par Θ. Les autres hypothèses utiles pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder se démontrent exactement comme dans le théorème $s=0$ (théorème IV.1.1).

Chapitre 5

Un phénomène de couches limites

1 Introduction

On étudie dans ce chapitre le comportement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes couplées à la loi constitutive d'Oldroyd lorsque le coefficient ε de diffusion en contrainte tend vers zéro. Comme au cours des deux précédents chapitres, le problème est posé sur un ouvert borné Ω de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$) dont le bord est noté Γ. Afin de mettre en évidence la dépendance en ε des inconnues, on écrit le problème qui nous intéresse sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \text{ div } \sigma^\varepsilon, \\ \text{div } u^\varepsilon = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon \cdot \nabla \sigma^\varepsilon + g(\sigma^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + \sigma^\varepsilon - \varepsilon \Delta \sigma^\varepsilon = D(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(0) = u_{init}, \quad \sigma^\varepsilon(0) = \sigma_{init}, \end{cases} \tag{V.1.1}$$

avec conditions aux limites de type Neumann pour la contrainte et Dirichlet pour la vitesse :

$$u^\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial n}\right|_\Gamma = 0.$$

Suite au chapitre 3, on sait qu'un tel système admet une solution. Néanmoins, ce chapitre permettra d'en redonner indirectement une preuve (preuve qui a l'inconvénient de demander beaucoup de régularité sur les données initiales). Plus exactement, notre but est de décrire le comportement de la solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ lorsque le paramètre de viscosité ε tend vers zéro. On s'attend à ce que la solution converge fortement dans L^2 (et en fait dans tout espace qui ne "voit" pas la condition aux limites $\partial_n \sigma^\varepsilon\big|_\Gamma = 0$) vers (u_0, p_0, σ_0), solution du système sans le terme diffusif en contrainte :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla u_0 - \Delta u_0 + \nabla p_0 = \text{ div } \sigma_0, \\ \text{div } u_0 = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla \sigma_0 + g(\sigma_0, \nabla u_0) + \sigma_0 = D(u_0), \\ u_0(0) = u_{init}, \quad \sigma_0(0) = \sigma_{init}, \quad u_0|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{V.1.2}$$

Là aussi, on a déjà montré qu'un tel système admet une solution. On sait même (voir chapitre 4) que, quitte à prendre des données initiales très régulières, la solution de (V.1.2) est aussi régulière que voulue.

Pour récupérer la condition aux limites sur σ, la solution de (V.1.1) se met à osciller très rapidement près du bord Γ. Une couche limite se forme alors au bord du domaine et on se propose de la décrire. De nombreuses études ont déjà été menées sur de tels phénomènes, voir par exemple les travaux de G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès [18], O. Guès et E. Grenier [39], O. Guès [42] et D. Sanchez [76]. On sait en particulier que dans le cas présent, c'est à dire lorsque le bord du domaine est caractéristique ($u^\varepsilon.n = 0$), la taille de la couche limite ainsi formée est d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. Plus précisement, le résultat principal affirme que u^ε, p^ε et σ^ε admettent sur $[0;T] \times \Omega$ un développement du type :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t,x) &= u_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,O(1) \\ p^\varepsilon(t,x) &= p_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,P\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\,O(1) \\ \sigma^\varepsilon(t,x) &= \sigma_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,\Sigma\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\,O(1). \end{aligned}$$

Dans cette formule, $d \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ correspond à la distance au bord. Cette fonction est telle que le domaine Ω corresponde à l'ensemble $\{d > 0\}$, le bord Γ à l'ensemble $\{d = 0\}$.

Pour comprendre ce phénomène, il peut être intéressant de regarder ce qui se passe lorsque l'on étudie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} y(x) - \varepsilon y''(x) = x \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \\ u'(0) = 0 \quad \text{et} \quad u'(1) = 1. \end{cases}$$

La solution, dessinée à la figure V.1.1, est proche de la droite $y = x$ qui est solution du cas $\varepsilon = 0$ (voir fig. V.1.2). La seule différence ayant lieu au bord du domaine, là où la condition de type Neumann n'est pas vérifiée par la solution $y = x$. Plus exactement, la solution s'écrit

$$y(x) = x + \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{e^{-\frac{(2-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}} + \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}}\right).$$

Elle admet pour développement asymptotique $y(x) = x + \sqrt{\varepsilon}\, e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + o(\varepsilon)$, on retrouve un comportement du même type que pour le problème (V.1.1).

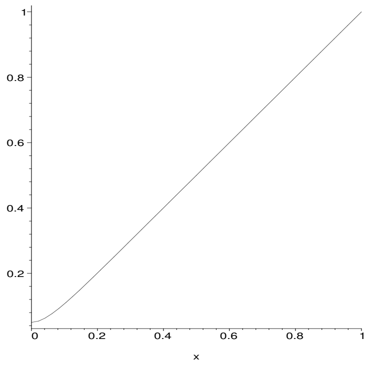


FIG. V.1.1: Solution $y(x)$ pour $\varepsilon = 1/400$

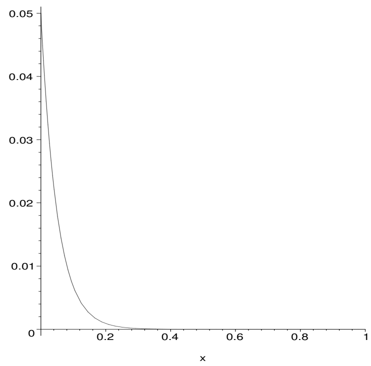


FIG. V.1.2: Différence entre $y(x)$ et la droite $y = x$ lorsque $\varepsilon = 1/400$, c'est-à-dire pour $\sqrt{\varepsilon} = 0.05$

2 Enoncé des résultats

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

Théorème V.2.1
Si $u_{init} \in H^4 \cap V_1$ et $\sigma_{init} \in H^4$ vérifient les relations de compatibilité (V.4.2) *alors il existe un temps $T > 0$ et deux fonctions $P \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega \times \mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+))$ et $\Sigma \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+))$ tels que, sur $[0,T] \times \Omega$, on ait*

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, w(t,x), \\ p^\varepsilon(t,x) = p_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, P\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} q(t,x), \\ \sigma^\varepsilon(t,x) = \sigma_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, \Sigma\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, \tau(t,x). \end{cases}$$

Les fonctions w, q et τ vérifient :

$$\begin{aligned} & w \in L^\infty(0,T; H^1) \cap L^2(0,T; H^2), \\ & q \in L^\infty(0,T; L^2) \cap L^2(0,T; H^1), \\ & \tau \in L^\infty(0,T; H^1) \quad \textit{et} \quad \varepsilon\tau \in L^2(0,T; H^2). \end{aligned}$$

Remarque V.2.1

– *Les fonctions P et Σ introduites ci-dessus sont des profils de couche limite qui satisfont*

$$\lim_{z \to +\infty} P(t,x,z) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{z \to +\infty} \Sigma(t,x,z) = 0.$$

On en déduit que la solution maximale du problème (V.1.1) *converge effectivement vers celle de* (V.1.2) *lorsque ε tend vers* 0.

– *Il est interessant de noter qu'il ne se forme pas de couche limite, au premier ordre sur le champ de vitesse. En fait, on verra au cours de la démonstration de ce théorème V.2.1 que la condition de divergence nulle implique automatiquement au champ de vitesse de ne pas avoir de couche limite dans sa composante normale au bord. Par contre, on verra aussi qu'une couche limite en la composante tangentielle de la vitesse existe à l'ordre suivant.*

La démonstration de ce résultat comporte essentiellement trois étapes. La première consiste à construire des profils de manière à ce que les sommes partielles forment une solution approchée : on effectue un développement asymptotique formel de la solution par la méthode B.K.W. (Brillouin, Kramers,Wentzel). Dans un second temps, on doit résoudre deux équations de profil, l'une correspondant aux équations initiales sans le terme $\varepsilon\Delta\sigma$, l'autre étant une équation de type hyperbolique-parabolique dans laquelle il faut contrôler la décroissance rapide à l'infini en la variable rapide. La troisième étape consiste à montrer que le reste du développement en puissance de ε est effectivement borné dans un espace adéquat.

3 Construction des profils

Suivant les travaux de O. Guès [42], on cherche un développement asymptotique de u^ε, p^ε et σ^ε sous la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) = u_0\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, u_1\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + ...$$
$$p^\varepsilon(t,x) = p_0\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, p_1\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + ...$$
$$\sigma^\varepsilon(t,x) = \sigma_0\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma_1\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + ...$$

Dans ce type de méthode, il est commode d'introduire les notations suivantes. Pour toute fonction f dépendant de t, x et z, on écrit :

$$f(t,x,z) = \overline{f}(t,x) + \widetilde{f}(t,x,z) \quad \text{avec} \quad \overline{f}(t,x) = \lim_{z\to+\infty} f(t,x,z).$$

On suppose que toutes les fonctions $\widetilde{f}$ sont à décroissance rapide à l'infini en z. En fait, les termes du type $\overline{f}$ correspondent aux termes intérieurs tandis que ceux du type $\widetilde{f}$ sont des termes de couche limite.

Remarque V.3.1
Le développement, s'il existe, n'est pas unique ! En fait, les termes principaux sont uniques car ils correspondent aux limites lorsque ε tend vers zéro (unicité de la limite). En cherchant des profils non plus sous la forme $f(t,x,z) = \overline{f}(t,x) + \widetilde{f}(t,x,z)$ mais sous la forme $f(t,x,z) = \overline{f}(t,x) + \widetilde{f}(t,z)$ alors on aurait unicité (voir par exemple [62]). Néanmoins, la valeur exacte des profils quand z est grand n'est pas fondamentale étant donné que l'essentiel de l'information qui nous est utile est contenue au voisinage du bord $\Gamma = \{z = 0\}$.

On remplace alors formellement $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ par son développement asymptotique dans les équations (V.1.1) et on ordonne en puissance de $\sqrt{\varepsilon}$. On cherche alors à déterminer les profils (u_i, p_i, σ_i) en identifiant tous les termes de même ordre en ε.

3.1 Ordre -1

Le terme Δu^ε est le seul susceptible d'apporter un terme en $1/\varepsilon$ dans les équations. Ceci se produit en effet lorsque l'on dérive deux fois $u_0(t,x,d(x)/\sqrt{\varepsilon})$ par rapport à x. Sa seule contribution $-\partial_z^2 u_0$ est donc nulle. Puisque $\overline{u_0}$ ne dépend pas de z, cette condition s'écrit aussi $-\partial_z^2 \widetilde{u_0} = 0$. En outre, la condition de décroissance à l'infini de toutes les dérivées de $\widetilde{u_0}$ implique nécessairement :

$$\widetilde{u_0} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \overline{u_0} = u_0.$$

3.2 Ordre $-\frac{1}{2}$

Sachant désormais que u_0 ne dépend pas de z, il est facile de voir que les seuls termes d'ordre $-\frac{1}{2}$ issus de l'équation de Navier-Stokes s'écrivent :

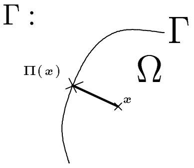
$$-\partial_z^2 \widetilde{u_1} + \nabla d\, \partial_z \widetilde{p_0} = \nabla d . \partial_z \widetilde{\sigma_0}. \tag{V.3.1}$$

On va voir que c'est la seule relation obtenue à cet ordre. En effet, concernant la loi constitutive, on pourrait s'attendre à voir apparaitre un terme d'ordre $-\frac{1}{2}$ du type :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,(u_0 \cdot \nabla) d\, \partial_z \widetilde{\sigma_0}.$$

Une observation attentive de ce terme montre qu'il est en fait d'ordre 0. Pour mettre ceci en évidence, appliquons la formule de Taylor à une fonction régulière f en un point x près du bord Γ :

$$f(t,x) = f(t,\Pi(x)) + d(x)f^\sharp(t,x),$$



$\Pi(x) \in \Gamma$ étant la projection de x sur Γ et $f^\sharp$ une fonction régulière bornée. En choisissant $f = u_0 \cdot \nabla d$, puisque par hypothèse u (donc u_0) est tangent au bord on a $f(t,\Pi(x)) = 0$. En utilisant ensuite le fait que $d(x) = \sqrt{\varepsilon}z$, on peut écrire :

$$(u_0 \cdot \nabla d)(t,x)\ \partial_z\widetilde{\sigma_0}\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\varepsilon}\ ((u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z\partial_z\widetilde{\sigma_0})\left(t,x,\frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

3.3 Ordre 0

A l'ordre 0, la condition de divergence nulle s'écrit $\operatorname{div} u_0 + \nabla d.\partial_z\widetilde{u_1} = 0$. En faisant tendre z vers $+\infty$, on en déduit :

$$\operatorname{div} u_0 = 0. \tag{V.3.2}$$

Et par différence, il reste :

$$\partial_z(\widetilde{u_1} \cdot \nabla d) = 0. \tag{V.3.3}$$

De même, les termes d'ordre 0 dans l'équation en σ s'écrivent d'une part (lorsque z tend vers $+\infty$, correspondant à l'intérieur du domaine) :

$$\partial_t\overline{\sigma_0} + u_0 \cdot \nabla\overline{\sigma_0} + g(\overline{\sigma_0},\nabla u_0) + \overline{\sigma_0} = D(u_0), \tag{V.3.4}$$

d'autre part (partie oscillante) :

$$\partial_t\widetilde{\sigma_0} + u_0 \cdot \nabla\widetilde{\sigma_0} + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z\partial_z\widetilde{\sigma_0} + g(\widetilde{\sigma_0},\nabla u_0) + \widetilde{\sigma_0} = 0. \tag{V.3.5}$$

On peut alors déterminer les premiers profils. En effet, $\widetilde{\sigma_0} = 0$ est l'unique solution de (V.3.5). Prenant ensuite le produit scalaire de (V.3.1) avec ∇d, et en utilisant l'équation (V.3.3) on montre que $\widetilde{p_0} = 0$. L'équation (V.3.1) se réécrit donc $\partial_z^2\widetilde{u_1} = 0$. On a donc obtenu :

$$\widetilde{u_1} = 0, \quad \widetilde{p_0} = 0, \quad \widetilde{\sigma_0} = 0.$$

Ce constat permet d'écrire assez simplement l'équation issue de Navier-Stokes à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla u_0 - \Delta u_0 + \nabla p_0 - \partial_z^2\widetilde{u_2} + \nabla d\ \partial_z\widetilde{p_1} = \operatorname{div} \sigma_0 + \nabla d.\partial_z\widetilde{\sigma_1}.$$

En séparant à nouveau la partie lente de la partie oscillante, on obtient :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla u_0 - \Delta u_0 + \nabla p_0 = \operatorname{div} \sigma_0, \tag{V.3.6}$$

$$-\partial_z^2\widetilde{u_2} + \nabla d\ \partial_z\widetilde{p_1} = \nabla d.\partial_z\widetilde{\sigma_1}.$$

On reporte ces résultats dans les équations concernant les parties non oscillantes (V.3.2), (V.3.4), (V.3.6) et on en déduit que u_0, p_0 et σ_0 sont solutions du problème initial (V.1.1) sans le terme de viscosité $\varepsilon\Delta\sigma$.

3.4 Ordre $\frac{1}{2}$

On itère les calculs à l'ordre suivant : la condition de divergence nulle s'écrit div $u_1 + \nabla d.\partial_z \widetilde{u_2} = 0$. En faisant tendre z vers $+\infty$, on en déduit succesivement :

$$\text{div } u_1 = 0, \quad \partial_z(\widetilde{u_2} \cdot \nabla d) = 0.$$

En ce qui concerne l'équation en σ, on a aussi :

$$\partial_t \overline{\sigma_1} + u_1 \cdot \nabla \sigma_0 + u_0 \cdot \nabla \overline{\sigma_1} + g(\sigma_0, \nabla u_1) + g(\overline{\sigma_1}, \nabla u_0) + \overline{\sigma_1} = D(u_1),$$

$$\partial_t \widetilde{\sigma_1} + u_0 \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z \widetilde{\sigma_1} + g(\widetilde{\sigma_1}, \nabla u_0) + g(\sigma_0, \nabla d \, \partial_z \widetilde{u_2}) + \widetilde{\sigma_1} - \partial_z^2 \widetilde{\sigma_1} = \nabla d \, \partial_z \widetilde{u_2}.$$

Cette fois çi la condition aux limites n'est plus nulle à l'ordre $1/2$, elle s'écrit :

$$\partial_z \widetilde{\sigma_1}\big|_{z=0, x\in\Gamma} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}.$$

C'est cette condition qui va induire une couche limite. En effet, $\partial_z \widetilde{u_2}$, $\widetilde{p_1}$ et $\widetilde{\sigma_1}$ sont solutions de :

$$\begin{cases} -\partial_z^2 \widetilde{u_2} + \nabla d \, \partial_z \widetilde{p_1} = \nabla d.\partial_z \widetilde{\sigma_1}, \\ \partial_z(\widetilde{u_2} \cdot \nabla d) = 0, \quad \widetilde{u_2}|_{z=0, x\in\Gamma} = 0, \\ \partial_t \widetilde{\sigma_1} + u_0 \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z \widetilde{\sigma_1} + g(\widetilde{\sigma_1}, \nabla u_0) + g(\sigma_0, \nabla d \, \partial_z \widetilde{u_2}) + \widetilde{\sigma_1} - \partial_z^2 \widetilde{\sigma_1} = \nabla d \, \partial_z \widetilde{u_2}, \\ \partial_z \widetilde{\sigma_1}\big|_{z=0, x\in\Gamma} = -\dfrac{\partial \sigma_0}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}. \end{cases} \tag{V.3.7}$$

D'après la seconde équation de (V.3.7), la composante normale de $\widetilde{u_2}$ est nulle. En prenant le produit scalaire de la première équation de (V.3.7) avec ∇d, on en déduit donc le premier profil oscillant en pression :

$$\widetilde{p_1} = \nabla d.(\nabla d.\widetilde{\sigma_1}).$$

En reportant ce résultat, on a alors

$$\partial_z \widetilde{u_2} = \nabla d \, \nabla d.(\nabla d.\widetilde{\sigma_1}) - \nabla d.\widetilde{\sigma_1}.$$

On en déduit la valeur du 2−tenseur $\nabla d \, \partial_z \widetilde{u_2}$, expression linéaire par rapport à $\widetilde{\sigma_1}$, que l'on peut injecter dans la dernière équation de (V.3.7) : on en déduit que $\widetilde{\sigma_1}$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\sigma_1} + u_0 \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z \widetilde{\sigma_1} - \partial_z^2 \widetilde{\sigma_1} = L(\widetilde{\sigma_1}), \\ \partial_z \widetilde{\sigma_1}\big|_{z=0, x\in\Gamma} = -\dfrac{\partial \sigma_0}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}, \end{cases}$$

où L est une application linéaire, dont les coefficients dépendent uniquement des variables t et x :

$$L(\tau) = (\nabla d \, \nabla d \, \nabla d.(\nabla d.\tau) - \nabla d \, \nabla d.\tau) - \tau - g(\tau, \nabla u_0) - g(\sigma_0, (\nabla d \, \nabla d \, \nabla d.(\nabla d.\tau) - \nabla d \, \nabla d.\tau)).$$

Pour la preuve de l'existence d'un premier profil, on utilisera les deux faits suivants :

$$\partial_z L(\tau) = L(\partial_z \tau), \quad \nabla L(\tau) = L(\nabla \tau) + M(\tau), \tag{V.3.8}$$

où M est un opérateur linéaire (dont les coefficients sont les dérivées en x de ceux de L).

4 Etude des profils

4.1 Terme principal du développement

Dans l'étude que l'on vient de mener, on a obtenu les termes principaux du développement u_0, p_0 et σ_0 comme solutions du système (V.1.1) sans le terme $\varepsilon\Delta\sigma$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla u_0 - \Delta u_0 + \nabla p_0 = \text{ div } \sigma_0, \\ \\ \text{div } u_0 = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \sigma_0}{\partial t} + u_0 \cdot \nabla \sigma_0 + g(\sigma_0, \nabla u_0) + \sigma_0 = D(u_0), \\ \\ u_0(0) = u_{init}, \quad u_0|_\Gamma = 0, \quad \sigma_0(0) = \sigma_{init}. \end{cases} \tag{V.4.1}$$

Ce système a été étudié dans le chapitre précédent. Rappelons le résultat qui nous sera utile ici :

On avait tout d'abord défini des conditions de compatibilité pour l'existence de solution. Ici, étant donné la régularité qui va nous être nécessaire, ces conditions se résument à (voir la définition de $f^{(k)}$ au chapitre précédent, équation (IV.5.2))

$$u_{init}^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad u_{init}^{(2)} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{V.4.2}$$

Sous de telles conditions, on a montré le résultat suivant

Théorème V.4.1
Si $u_{init} \in H^4 \cap V_1$ *et* $\sigma_{init} \in H^4$ *vérifient les relations de compatibilité* (V.4.2) *alors il existe un temps* $T > 0$ *tel que le problème* (V.4.1) *admette une solution* (u_0, σ_0) *vérifiant*

$$u_0 \in L^\infty(0, T; H^4 \cap V_1) \cap L^2(0, T; H^5 \cap V_1) \quad \text{et} \quad \sigma_0 \in L^\infty(0, T; H^4).$$

De plus, la solution satisfait les estimations suivantes sur les dérivées en temps :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t} \in L^\infty(0, T^*; H^2 \cap V_0) \cap L^2(0, T^*; H^3 \cap V_0), &&\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \in L^\infty(0, T^*; H^3), \\ &\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T^*; V_0) \cap L^2(0, T^*; V_1), &&\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T^*; H^1). \end{aligned}$$

Remarque V.4.1
Dans le cas où les données ne sont pas bien préparées, c'est à dire lorsqu'elles ne vérifient pas (V.4.2)*, on s'attend à observer une couche limite en temps. J.Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E.Grenier [21] ont prouvé (dans un cadre physique différent) que la solution dépend aussi des variables* t/ε^k*, pour* $k \in \mathbb{N}$*. Pour un temps assez long, même pour des données mal préparées, le profil que l'on a trouvé s'approche effectivement du profil exact : le fluide se prépare lui même ! Autrement dit, on peut considérer notre dévelopement correct si l'on suppose que l'équation "tourne" depuis quelque temps.*

4.2 Premier profil oscillant

On a vu dans la partie 3 que le terme oscillant en pression et le second profil en vitesse se déduisent immédiatement du terme oscillant en contrainte *via* les relations :

$$\widetilde{p_1} = \nabla d.(\nabla d.\widetilde{\sigma_1}). \tag{V.4.3}$$

$$\partial_z \widetilde{u_2} = \nabla d \, \nabla d.(\nabla d.\widetilde{\sigma_1}) - \nabla d.\widetilde{\sigma_1}. \tag{V.4.4}$$

La seule équation de profil que l'on va être amené à résoudre est celle concernant $\widetilde{\sigma_1}$. On cherche $\widetilde{\sigma_1}(t,x,z)$ solution de l'équation linéaire suivante (l'opérateur linéaire L étant défini à la fin de la partie 3) :

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\sigma_1} + u_0 \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z \widetilde{\sigma_1} - \partial_z^2 \widetilde{\sigma_1} = L(\widetilde{\sigma_1}), \\ \partial_z \widetilde{\sigma_1}\big|_{z=0, x\in\Gamma} = -\dfrac{\partial \sigma_0}{\partial n}\Big|_\Gamma, \\ \widetilde{\sigma_1}(0,x,z) = 0, \\ \widetilde{\sigma_1} \text{ à décroissance rapide en la variable } z. \end{cases} \tag{V.4.5}$$

On prouve alors un théorème d'existence de solutions régulières :

Théorème V.4.2
Si σ_0 et u_0 vérifient :

$$u_0 \in L^\infty(0,T^*; H^3 \cap V_1), \quad \sigma_0 \in L^2(0,T^*;H^4) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \in L^2(0,T^*;H^3),$$

alors il existe une solution $\widetilde{\sigma_1}$ au système (V.4.5) *telle que :*

$$\widetilde{\sigma_1} \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega) \otimes H^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega) \otimes H^3(\mathbb{R}^+)),$$
$$\widetilde{\sigma_1} \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Remarque V.4.2

- *La régularité que l'on prouve dans ce théorème implique en particulier :*

$$\widetilde{\sigma_1} \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)),$$
$$\partial_z \widetilde{\sigma_1} \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega \times \mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)).$$

- *On remarquera que les hypothèses faites sur u_0 et σ_0 sont des conséquences directes de la régularité obtenue dans le théorème V.4.1.*

La preuve s'articule autour de trois points. On effectue d'abord un relèvement de la condition au bord afin d'obtenir un système équivalent avec des conditions aux limites homogènes. On montre ensuite par une méthode de type Galerkin que ce nouveau système admet des solutions faibles. Dans une dernière étape, on met en place une méthode permettant d'augmenter la régularité de la solution jusqu'à obtenir la régularité souhaitée.

Preuve du théorème V.4.2

Etape 1 : le relèvement.
La première étape consiste à se ramener à un problème homogène au bord du domaine $\Omega \times [0,+\infty[$. Pour ceci, on effectue un relèvement de la condition de Neumann au bord. Plus précisement, on définit la fonction $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\zeta'(0) = 1$ et Supp$(\zeta) \subset [0,1]$. On note alors

$$\theta(t,x,z) = \zeta(z) \nabla d(x) \cdot \nabla \sigma_0(t,x)$$

et on cherche $\widetilde{\sigma_1}$ sous la forme $\widetilde{\sigma_1} = s - \theta$. Puisque $\nabla d(x) \cdot \nabla \sigma_0(t,x)$ coïncide avec $\partial_n \sigma_0$ sur le bord Γ, on a équivalence entre les conditions

$$\partial_z \widetilde{\sigma_1}\big|_{z=0,x\in\Gamma} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial n}\Big|_\Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_z s|_{z=0,x\in\Gamma} = 0.$$

Il est d'usage (voir [18, 42]) de rechercher une solution s telle que $\partial_z s\big|_{z=0} = 0$. Cette égalité n'est *a priori* vraie que pour $x \in \Gamma$ mais on l'étend sur tout l'ouvert Ω. Ce choix, quelque peu arbitraire, est justifié par la suite en montrant la validité d'un tel développement asymptotique.

On cherche le tenseur s, solution de

$$\begin{cases} \partial_t s + u_0 \cdot \nabla s + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z s - \partial_z^2 s = L(s) + K, \\ \partial_z s\big|_{z=0} = 0, \\ s(0,x,z) = 0, \\ s \text{ à décroissance rapide en la variable } z \end{cases} \tag{V.4.6}$$

où $K = \partial_t \theta + u_0 \cdot \nabla \theta + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z \theta - \partial_z^2 \theta - L(\theta)$.

La régularité obtenue sur les termes principaux du développement (théorème V.4.1) implique que

$$K \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \otimes H_0^\infty(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 2 : Existence de solution.

Bien entendu, l'unicité d'une telle solution résulte de la linéarité de l'équation (V.4.6). Grâce à des approximations de type Galerkin sur un espace bien choisi, on construit tout d'abord des solutions faibles du problème sur des intervalles du type $[0,M]$ en la variable z. En obtenant une borne d'énergie indépendante de M, on en déduit une solution faible pour $z \in \mathbb{R}^+$.

Etape 2-1 Soit $M > 0$. On commence par résoudre le problème pour $z \in [0,M]$ avec condition de Dirichlet homogène en $z = M$. Plus exactement, on considère le problème (V.4.6) pour $z \in [0,M]$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \partial_z s = 0 \quad \text{pour z=0}, \\ s = 0 \quad \text{pour z=M}. \end{cases}$$

On utilise une approximation de Galerkin. On commence par considérer $(w_i)_{i\geq 0}$ une base de l'espace V_1, par exemple la famille des fonctions propres de l'opérateur de Stokes A. Ensuite, on construit ensuite une base de l'espace $\{\tau \in H^1(0,M) \ / \ \tau'(0) = 0 \text{ et } \tau(M) = 0\}$ en posant, pour $j \geq 0$,

$$\tau_j(z) = \cos\left(\frac{z}{M}\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right).$$

Cette famille est orthogonale aussi bien dans $L^2(0,M)$ que dans $H^1(0,M)$. Ainsi, la famille $(w_i \otimes \tau_j)_{i,j\geq 0}$ est une base orthogonale de $V_0 \otimes L^2(0,M)$ et de $V_1 \otimes H^1(0,M)$. En identifiant $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à l'ensemble $\mathbb{N}$, on notera $(e_I)_{I\geq 0}$ cette base.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on cherche une fonction $s_n(t) = \displaystyle\sum_{I=0}^{n} \alpha_I(t) e_I \in E_n$ telle que pour tout $e \in E_n$,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\, s_n}{dt}, e\right)_{xz,M} + (u_0 \cdot \nabla s_n, e)_{xz,M} + ((u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z s_n, e)_{xz,M} + (\partial_z s_n, \partial_z e)_{xz,M} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (L(s_n), e)_{xz,M} + (K, e)_{xz,M}, \\ s_n(0) = 0. \end{cases}$$

Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{xz,M}$ est défini sur l'espace $V_0 \otimes L^2(0,M)$ par :

$$(f,g)_{xz,M} = \int_\Omega \int_0^M f : g.$$

La norme associée est notée $|\cdot|_{xz,M}$.

En choisissant $e = s_n$ pour fonction test, on en déduit :

$$\frac{d\,|s_n|^2_{xz,M}}{dt} + |\partial_z s_n|^2_{xz,M} = \int_\Omega \int_0^M \Big(L(s_n) + K - u_0 \cdot \nabla s_n - (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z s_n \Big) : s_n.$$

En intégrant par parties en la variable $x \in \Omega$, on montre que $\int_\Omega \int_0^M (u_0 \cdot \nabla s_n) : s_n = 0$ (voir le lemme III.2.2). Pour le dernier terme, on intègre par parties en la variable $z \in [0,M]$ en utilisant le fait que $(u_0 \cdot \nabla d)^\sharp$ est indépendant de cette variable. On obtient l'estimation suivante :

$$\frac{d\,|s_n|^2_{xz,M}}{dt} + |\partial_z s_n|^2_{xz,M} \le \Big| \int_\Omega \int_0^M L(s_n) : s_n \Big| + \Big| \int_\Omega \int_0^M K : s_n \Big| + \frac{1}{2} \Big| \int_\Omega \int_0^M (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp s_n : s_n \Big|,$$

$$\frac{d\,|s_n|^2_{xz,M}}{dt} + |\partial_z s_n|^2_{xz,M} \le C(|s_n|^2_{xz,M} + |K|^2_{xz,M}) \le C(|s_n|^2_{xz,M} + |K|^2_{xz,\infty}). \tag{V.4.7}$$

Le lemme de Gronwall fournit alors la borne L^∞ en temps (rappelons ici que $s_n(0) = 0$) :

$$|s_n|^2_{xz,M}(t) \le e^{CT} \int_0^T |K|^2_{xz,\infty}(t)dt \quad \text{pour tout } t \in [0,T], \tag{V.4.8}$$

alors que le terme $|\partial_z s_n|^2_{xz,M}$ permet d'avoir une estimation plus régulière en z :

$$\int_0^T |\partial_z s_n|^2_{xz,M}(t)dt \le CT\ \mathrm{Sup}_T |s_n|^2_{xz,M} + \int_0^T |K|^2_{xz,\infty}(t)dt. \tag{V.4.9}$$

Etape 2-2 On vient de démontrer que la suite $\{s_n\}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\otimes L^2([0,M]))$ ainsi que dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)\otimes H^1([0,M]))$. Elle converge faiblement (ou faiblement-*) dans ces espaces et on note s sa limite. Puisque les bornes obtenues dans (V.4.8) et (V.4.9) sont indépendantes de M, on peut ensuite passer à la limite $M \to +\infty$. L'équation étant linéaire, on a ainsi l'existence d'une solution s telle que :

$$s \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega)\otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 3 : Régularité.

Les approximations de Galerkin ne permettent pas d'obtenir plus de régularité en z sur les solutions. En effet, si on multiplie formellement l'équation d'évolution de s par $\partial_z^2 s$, le terme issu de $(u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z \partial_z s$ ne pourra pas être contrôlé sur $[0,M]$ (apparition de termes de bord non nul lors d'une éventuelle intégration par parties en z). Il faut donc opérer autrement.

La méthode est la suivante : on applique un opérateur différentiel $\mathcal{Z}$ à l'équation (V.4.6). La fonction $\mathcal{Z}s$ vérifie alors une équation du même type que (V.4.6) où le second membre contient non seulement $\mathcal{Z}F$ mais aussi tous les commutateurs $[\partial_t, \mathcal{Z}]$, $[u_0 \cdot \nabla, \mathcal{Z}]$, etc. En choisissant différents opérateurs $\mathcal{Z}$ dans un ordre bien précis, on pourra à chaque étape contrôler le second membre et montrer que $\mathcal{Z}s$ est aussi régulier que s.

Le choix de l'opérateur $\mathcal{Z}$ est limité par le fait que $\mathcal{Z}s$ doit aussi vérifier les conditions aux limites du problème (V.4.6). On va donc distinguer les dérivées conormales (celle du type $z\partial_z$, ∂_x...) pour lesquelles on peut appliquer cette méthode, et les dérivées normale (∂_z) qui seront traitées en dernier lieu en utilisant la régularisation de l'opérateur $-\partial_z^2$.

Etape 3-1 Soit $S_0 = z\partial_z s$. En dérivant l'équation (V.4.6) par rapport à z puis en multipliant par z, on en déduit que S_0 est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t S_0 + u_0 \cdot \nabla S_0 + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z\partial_z S_0 - \partial_z^2 S_0 = L(S_0) + z\partial_z K - 2\partial_z^2 s, \\ \partial_z S_0\big|_{z=0} = 0, \\ S_0(0,x,z) = 0, \\ S_0 \text{ à décroissance rapide en la variable } z. \end{cases}$$

Notons ici que l'on a utilisé le fait que les coefficients de l'application linéaire L sont indépendant de la variable z (voir l'équation (V.3.8)).

Exactement comme pour l'étape 2, on effectue une approximation de Galerkin en se restreignant à $z \in [0, M]$ avec condition de Dirichlet homogène en $z = M$. On multiplie formellement l'équation ci-dessus par S_0 et on intégre sur $\Omega \times [0, M]$, on retrouve une estimation similaire à (V.4.7) modulo le fait que le second membre fournit un terme supplémentaire :

$$\text{terme additif} = \int_\Omega \int_0^M -2\partial_z^2 s : S_0.$$

En intégrant par parties en z, il est important de remarquer que les termes de bord s'annulent (car $S_0\big|_{z=L} = 0$ et $\partial_z s\big|_{z=0} = 0$). On obtient :

$$|\text{terme additif}| \leq \left| \int_\Omega \int_0^M 2\partial_z s : \partial_z S_0 \right| \leq \alpha |\partial_z S_0|^2_{xz,M} + \frac{1}{\alpha} |\partial_z s|^2_{xz,\infty}, \quad \alpha > 0.$$

Quitte à choisir α assez petit, le terme $\alpha|\partial_z S_0|^2_{xz,M}$ est absorbé par le terme $|\partial_z S_0|^2_{xz,M}$ du membre de gauche. L'estimation de l'étape 2 prouvant que $|\partial_z s|^2_{xz,\infty}$ est $L^1(0,T)$, on peut, comme au cours de l'étape 2, appliquer le lemme de Gronwall puis passer à la limite $M \to +\infty$:

$$S_0 = z\partial_z s \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; L^2(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 3-2 De même, $S_1 = \nabla s$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t S_1 + u_0 \cdot \nabla S_1 + (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z\partial_z S_1 - \partial_z^2 S_1 \\ \qquad\qquad = L(S_1) + M(s) + \nabla F - \nabla u_0 \cdot \nabla s - \nabla((u_0 \cdot \nabla d)^\sharp) z\partial_z s, \\ \partial_z S_1\big|_{z=0} = 0, \\ S_1(0,x,z) = 0, \\ S_1 \text{ à décroissance rapide en la variable } z. \end{cases}$$

Remarquons que dans ce cas, on a utilisé le fait que $\nabla L(s) = L(S_1) + M(s)$, égalité issue de l'équation (V.3.8). Là encore, on peut mener les mêmes calculs. En utilisant en particulier l'étape précédente ($z\partial_z s \in H^1(\mathbb{R}^+)$), on obtient :

$$s \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 3-3 Pour avoir encore plus de régularité en la variable x, on doit d'abord estimer $S_2 = z\partial_z(z\partial_z s)$ puis $S_3 = \nabla z\partial_z s$. En appliquant l'opérateur $z\partial_z$ deux fois au système (V.4.6) et en utilisant le fait que le commutateur $[(z\partial_z)^2, \partial_z^2]$ s'écrit :

$$[(z\partial_z)^2, \partial_z^2] = 3(\partial_z^2 - \partial_z^2(z\partial_z)),$$

on montre que S_2 est solution d'un système de type (V.4.6) où le second membre vaut :

$$L(S_2) + z\partial_z(z\partial_z K) + 3(\partial_z^2 s - \partial_z^2(z\partial_z s)).$$

En multipliant par S_2 puis en intégrant sur $\Omega \times [0, M]$, il suffit de contrôler les quantités $\int_\Omega \int_0^M \partial_z^2 s : S_2$ et $\int_\Omega \int_0^M \partial_z^2(z\partial_z s) : S_2$ de la façon suivante (pour tout $\alpha > 0$) :

$$\left| \int_\Omega \int_0^M \partial_z^2 s : S_2 \right| = \left| \int_\Omega \int_0^M \partial_z s : \partial_z S_2 \right| \leq \frac{\alpha}{2} |\partial_z S_2|_{xz,M}^2 + \frac{1}{2\alpha} |\partial_z s|_{xz,\infty}^2,$$

$$\left| \int_\Omega \int_0^M \partial_z^2(z\partial_z s) : S_2 \right| = \left| \int_\Omega \int_0^M \partial_z(z\partial_z s) : \partial_z S_2 \right| \leq \frac{\alpha}{2} |\partial_z S_2|_{xz,M}^2 + \frac{1}{2\alpha} |\partial_z(z\partial_z s)|_{xz,\infty}^2.$$

Quitte à choisir α assez petit, les termes $|\partial_z S_2|_{xz,M}^2$ sont absorbés par les termes similaires du membre de gauche issus de $(z\partial_z)^2$(V.4.6). La régularité des deux termes restant a été prouvée au cours des étapes antérieures. Comme précédemment, on passe à la limite $M \to +\infty$:

$$S_2 = z\partial_z(z\partial_z s) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Remarque V.4.3
Puisque la fonction K est très régulière en la variable z (elle est H_0^∞), on peut montrer par récurrence sur k que $(z\partial_z)^k s$ est aussi régulière que S_2 (qui correspond au cas $k = 2$ alors que S_0 correspond au cas $k = 1$).

La fonction $S_3 = \nabla z\partial_z s$ est solution d'une équation du même type que S_0, S_1 et S_2 où le second membre vaut :

$$L(S_3) + M(z\partial_z s) + \nabla z\partial_z K - \nabla u_0 \cdot \nabla z\partial_z s - \nabla((u_0 \cdot \nabla d)^\sharp) z\partial_z(z\partial_z s) - 2\nabla\partial_z^2 s.$$

Là encore, les résultats précédent permettent de contrôler tous les termes facilement. On en déduit :

$$z\partial_z s \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 3-4 Exactement comme au cours de l'étape **3-2**, en prenant deux fois le gradient de (V.4.6), et en utilisant les estimations précédentes, on montre que :

$$s \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

Etape 3-5 Il reste à estimer les dérivées normales $\partial_z^k s$. Il suffit pour cela d'utiliser la régularité de l'opérateur $\partial_t - \partial_z^2$ et d'écrire l'équation (V.4.6) sous la forme :

$$\partial_t s - \partial_z^2 s = L(s) + K - u_0 \cdot \nabla s - (u_0 \cdot \nabla d)^\sharp z\partial_z s.$$

Les étapes précédentes montrent que le second membre de cette équation est dans

$$L^2(0, T; H^1(\Omega) \otimes H^1(\mathbb{R}^+)).$$

On en déduit donc facilement que :

$$s \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \otimes H^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega) \otimes H^3(\mathbb{R}^+)).$$

5 Estimation du reste

5.1 Equation vérifiée par le reste

Les calculs menés au cours de la partie 3 ne sont valables qu'au voisinage du bord Γ (il faut que la fonction distance au bord d soit bien définie et régulière). Pour justifier rigoureusement les calculs non seulement au bord du domaine mais sur Ω tout entier, on introduit une fonction de troncature $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dont le support est contenu dans un voisinage du bord, et valant 1 sur un voisinage plus restreint de ce bord. Pour relever la condition au bord $\partial_n \widetilde{\sigma_1}(t,x,0)$, on introduit aussi $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2)$ telle que $\partial_t \theta \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1)$ et $\partial_n \theta(t,x) = \partial_n \widetilde{\sigma_1}(t,x,0)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$. On cherche finalement $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ sous la forme

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, w(t,x), \\ p^\varepsilon(t,x) = p_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, \psi(x) \widetilde{p_1}\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon} q(t,x), \\ \sigma^\varepsilon(t,x) = \sigma_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, \psi(x) \widetilde{\sigma_1}\left(t, x, \dfrac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\, \theta(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, \tau(t,x). \end{cases}$$

En injectant ces profils dans les équations (V.1.1) et en utilisant les équations vérifiées par les profils (équations (V.4.1), (V.4.3), (V.4.4) et (V.4.5)) on en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \nabla(q + \psi\, \widetilde{p_1}) = \text{ div } (\tau + \theta + \psi\, \widetilde{\sigma_1}) - (u_0 + \sqrt{\varepsilon}\, w) \cdot \nabla w - w \cdot \nabla u_0, \\ \text{div } w = 0, \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial t} + \tau - \varepsilon \Delta \tau = -\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - u_0 \cdot \nabla \psi\, \widetilde{\sigma_1} - w \cdot \nabla \sigma_0 - \sqrt{\varepsilon} \psi w \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} \\ \qquad - \psi w \cdot \nabla d \partial_z \widetilde{\sigma_1} - \sqrt{\varepsilon} w \cdot \nabla \psi \widetilde{\sigma_1} - g(\theta, \nabla u_0) \\ \qquad - g(\tau, \nabla u_0) - g(\sigma_0, \nabla w) - \sqrt{\varepsilon} g(\psi \widetilde{\sigma_1}, \nabla w) \\ \qquad - \sqrt{\varepsilon} g(\theta, \nabla w) - \sqrt{\varepsilon} g(\tau, \nabla w) - u_0 \cdot \nabla \theta - u_0 \cdot \nabla \tau \\ \qquad - \sqrt{\varepsilon} w \cdot \nabla \theta - \sqrt{\varepsilon} w \cdot \nabla \tau - \theta + \sqrt{\varepsilon} \Delta \sigma_0 + \varepsilon \Delta \theta \\ \qquad + \varepsilon \Delta \psi \widetilde{\sigma_1} + 2\varepsilon \nabla \psi \cdot \nabla \widetilde{\sigma_1} + 2\sqrt{\varepsilon} \nabla \psi \cdot \nabla d \partial_z \widetilde{\sigma_1} \\ \qquad + \varepsilon \psi \Delta \widetilde{\sigma_1} + 2\sqrt{\varepsilon} \psi \nabla d \cdot \nabla \partial_z \widetilde{\sigma_1} + \sqrt{\varepsilon} \psi \Delta d \partial_z \widetilde{\sigma_1} + D(w), \\ w(0) = w_0, \quad w|_\Gamma = 0, \quad \tau(0) = \tau_0, \\ \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{V.5.1}$$

Remarque V.5.1
Pour utiliser rigoureusement les estimations (V.4.4) *et* (V.4.5), *on doit poser*

$$u^\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\, w(t,x) + \varepsilon\, \psi(x) \widetilde{u_2}\left(t, x, \frac{d(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Les termes supplémentaires qui apparaisent dans les équations vérifiées par le reste (ceux issus de $\varepsilon \widetilde{u_2}$) seront tous d'ordre au moins $1/2$ en ε et donc facilement contrôlés.

5.2 Estimation du reste

On multiplie ensuite l'équation d'évolution pour w par Aw :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\|w\|_1^2}{2}\right) + C_0 \|w\|_2^2 \le \left| \int_\Omega \text{div } (\tau + \theta + \psi \widetilde{\sigma_1}).Aw \right| + \left| \int_\Omega (u_0 \cdot \nabla w).Aw \right| \\ + \left| \int_\Omega \sqrt{\varepsilon} (w \cdot \nabla w).Aw \right| + \left| \int_\Omega (w \cdot \nabla u_0).Aw \right|.$$

On a :

$$\left|\int_\Omega \text{div } (\tau+\theta+\psi\widetilde{\sigma_1}).Aw\right| \leq \frac{C_0}{8}\|w\|_2^2 + C(\|\tau\|_1^2+\|\theta\|_1^2+|\psi|_\infty^2\|\widetilde{\sigma_1}\|_1^2),$$
$$\left|\int_\Omega (u_0\cdot\nabla w).Aw\right| \leq \frac{C_0}{8}\|w\|_2^2 + C|\nabla w|_2^2|u_0|_\infty,$$
$$\left|\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}(w\cdot\nabla w).Aw\right| \leq \sqrt{\varepsilon}|w|_\infty|\nabla w|_2|Aw|_2 \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|_2^{3/2}\|w\|_1^{3/2} \leq \frac{C_0}{8}\|w\|_2^2 + C\|w\|_1^6,$$
$$\left|\int_\Omega (w\cdot\nabla u_0).Aw\right| \leq \frac{C_0}{8}\|w\|_2^2 + C|w|_2^2|\nabla u_0|_\infty.$$

D'où finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\|w\|_1^2}{2}\right) + \frac{C_0}{2}\|w\|_2^2 \leq C(\|\tau\|_1^2+\|\theta\|_1^2+|\psi|_\infty^2\|\widetilde{\sigma_1}\|_1^2+\|w\|_1^6+|w|_2^2|\nabla u_0|_\infty+|\nabla w|_2^2|u_0|_\infty).$$

Pour simplifier l'étude menée sur l'équation en τ, on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+\tau-\varepsilon\Delta\tau = I-\sqrt{\varepsilon}J-u_0\cdot\nabla\tau.$$

On multiplie cette équation par τ puis par $-\Delta\tau$. Les termes du type I se traitent de la façon suivante

$$\left|\int_\Omega I:\Delta\tau\right| = \left|\int_\Omega \nabla I \vdots \nabla\tau\right| \leq \frac{C}{2}|\nabla\tau|_2^2 + \frac{1}{2C}|\nabla I|_2^2,$$

alors que ceux du type $\sqrt{\varepsilon}J$ s'écrivent

$$\left|\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}J:\Delta\tau\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\Delta\tau|_2^2 + \frac{1}{2}|J|_2^2.$$

Enfin, le terme $u_0\cdot\nabla\tau$ s'écrit en utilisant la relation d'orthogonalité (lemme III.2.2) :

$$\left|\int_\Omega (u_0\cdot\nabla\tau):\Delta\tau\right| = \left|\int_\Omega (\nabla u_0\cdot\nabla\tau)\vdots\nabla\tau\right| \leq C\|u_0\|_3|\nabla\tau|_2^2.$$

On en déduit alors, puisque $u_0\in L^2H^3$, $\sigma_0\in L^2H^2$, $\widetilde{\sigma_1}\in L^2H^2\cap L^4H^1$, $\partial_z\widetilde{\sigma_1}\in L^2H^1$, $\partial_t\theta\in L^2H^1$ et $\theta\in L^2H^2\cap L^4H^1$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\|\tau\|_1^2}{2}\right)+\|\tau\|_1^2+\varepsilon|\Delta\tau|_2^2 \leq{}& \frac{1}{2}\|w\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}|\Delta\tau|_2^2+C\Bigg(\left\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\|_1^2+\|u_0\|_2^2\|\widetilde{\sigma_1}\|_1^2+\|w\|_1^2\|\widetilde{\sigma_1}\|_2^2\\ &+\|\partial_z\widetilde{\sigma_1}\|_1^2|\tau|_2^2+\|w\|_1^2\|\widetilde{\sigma_1}\|_1^2+\|\theta\|_1^2\|u_0\|_3^2+\|\tau\|_1^2\|u_0\|_3^2\\ &+\|\sigma_0\|_2^2\|\tau\|_1^2+\|\widetilde{\sigma_1}\|_1^4\|w\|_1^2+\|\theta\|_1^4\|w\|_1^2+\|\tau\|_1^4\|w\|_1^2\\ &+\|u_0\|_2^2\|\theta\|_2^2+\|u_0\|_3\|\tau\|_1^2+\|\theta\|_2^2\|w\|_1^2+\|\tau\|_1^4\|w\|_1^2\\ &+\|\theta\|_1^2+\|\sigma_0\|_2^2+\|\theta\|_2^2+\|\widetilde{\sigma_1}\|_2^2+\|\partial_z\widetilde{\sigma_1}\|_1^2+|\nabla\tau|_2^2\Bigg).\end{aligned} \tag{V.5.2}$$

En regroupant les deux estimations, on trouve une estimation de la forme

$$\begin{aligned}&y'(t)+z(t)\leq P(y(t)),\\ &y=\|\tau\|_1^2+\|w\|_1^2,\\ &z=\|\tau\|_1^2+\varepsilon\|\tau\|_2^2+\|w\|_2^2,\end{aligned}$$

où le polynôme P est indépendant de ε. De façon classique on en déduit qu'il existe un temps d'existence T indépendant de ε tel que w et τ soient bornées dans $L^\infty(0,T;H^1)$, w et $\varepsilon\tau$ etant bornées dans $L^2(0,T;H^2)$.

Pour ce qui est de la régularité du reste en pression q, il suffit d'utiliser le lemme de régularité du problème de Stokes sur la vitesse w.

Troisième partie

Etude numérique du modèle

Introduction

On présente dans cette partie, une étude numérique des équations introduites dans la première partie (équations (II.3.1)). Les résultats de ces deux chapitres sont en partie exposés dans [12]. Ils ont pour but d'ouvrir un large éventail d'applications pour le modèle décrit dans les chapitres 1 et 2. L'intérêt du monde scientifique pour la compréhension des phénomènes physiques que l'on tente de décrire est immense : depuis la première mention sur la formation de gouttes dans la littérature scientifique, due semble-t-il à E. Mariotte en 1686 ('*Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*' E. Michallet, Paris) jusqu'à de récents articles de "vulgarisation" accessibles au plus grand nombre (La recherche, Mars 2002 '*Quand les gouttes ne rebondissent plus*' D. Bonn, V. Bergeron et L. Vovelle).

La motivation du chapitre 6 réside dans la mise en place d'un schéma numérique précis et adapté. Un domaine rectangulaire avec maillage régulier est utilisé mais cette géométrie peut être généralisée grâce à une méthode de domaine fictif, ce qui permet, avec un coût raisonnable, de considérer des tests physiques très variés. Pour ce qui est de la précision, on s'est efforcé d'installer des méthodes correspondant à nos besoins. Une attention toute particulière a été réservée aux termes convectifs, dont on sait qu'ils sont sources de diffusion numérique pouvant masquer les phénomènes physiques que l'on veut observer. De même, pour ce qui est de l'équation de transport correspondant à la loi constitutive, les propriétés liées à la visco-élasticité ont induit le choix d'une méthode originale de type "exponential fitting", dégénérant correctement dans le cas des fluides newtoniens. Dans ces deux cas, des théorèmes de stabilité viennent compléter notre étude.

Ensuite, on s'est attaché à montrer la pertinence du modèle présenté pour des applications physiques diverses :

– Les exemples des shampooings, de la mayonnaise, des lessives liquides sont autant de fluides qui, soumis à un écoulement de cisaillement laminaire, ont un comportement beaucoup plus riche que les fluides newtoniens. Un des objectifs de ce dernier chapitre est de mettre l'accent sur l'importance des effets non newtoniens dans le cas d'un écoulement sous cisaillement et de retrouver des instabilités dues à l'élasticité de certains fluides [40, 41, 65, 80].
– Les études passées ont mis en évidence un fort couplage entre la structure du fluide et l'écoulement : fragmentation d'une émulsion, transitions de texture dans une phase lamellaire, etc. Il est intéressant d'étendre ces études à des écoulements instables voire turbulents. En effet, l'action d'un mécanisme déstabilisant sur l'écoulement d'un fluide complexe et sur sa structure reste un problème ouvert. On propose au cours du chapitre 7, une étude menée conjointement avec une équipe du C.R.P.P. [24, 75] permettant d'oberver numériquement un tel phénomène.
– L'intéret de comprendre comment s'écoulent de tels fluides et de caractériser leur dynamique est bien évidemment très important du point de vue industriel, que ce soit concernant l'industrie agricole (amélioration des pulvérisations de pesticide), l'industrie médicale (développement de technique microfluidique permettant de trier des molécules) ou bien d'autres encore. Le dernier test va dans ce sens : il a pour but d'observer les différences de structure dans le remplissage d'une cuve avec un fluide newtonien ou visco-élastique.

Chapitre 6

Schémas numériques

1 Discrétisation en temps

La discrétisation en temps est effectuée avec un pas de temps δt (variable à chaque itération) grâce à une méthode à pas fractionnaires. Les trois étapes principales correspondent naturellement aux trois équations du système : Cahn-Hilliard, Navier-Stokes et la loi constitutive d'Oldroyd. Chacune de ces trois étapes sera elle-même décomposée en plusieurs pas, en particulier pour traiter les termes de convection.

1.1 Discrétisation en temps de l'équation de Cahn-Hilliard

Connaissant les valeurs φ^n, μ^n et v^n à l'instant t^n, la première étape consiste à déterminer la solution $(\varphi^{n+1/2}, \mu^{n+1/2})$ du problème de Cahn-Hilliard sans le terme de transport. Pour ceci, la méthode utilisée est une θ-méthode. Plus précisemment, on écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\delta t} - \dfrac{1}{\mathcal{P}e} \operatorname{div} \left(\dfrac{B(\varphi^n)}{\rho(\varphi^n)} \nabla \left(\dfrac{\theta \mu^{n+1/2} + (1-\theta)\mu^n}{\rho(\varphi^n)} \right) \right) = 0, \\ (\theta \mu^{n+1/2} + (1-\theta)\mu^n) + \alpha^2 \Delta(\theta \varphi^{n+1/2} + (1-\theta)\varphi^n) = F'(\theta \varphi^{n+1/2} + (1-\theta)\varphi^n). \end{cases}$$

De façon assurer la stabilité asymptotique on doit choisir $\theta \geq 0.5$ et on sait que plus θ est proche de 0.5, plus la méthode sera précise. Dans tous les essais numériques, la valeur choisie sera $\theta = 0.6$. Enfin, une méthode de point fixe est utilisée pour résoudre le système non linéaire ainsi obtenu. Dans les rares cas où cette méthode ne converge pas assez rapidement, une méthode de Newton est utilisée pour résoudre le système non linéaire (voir [11]).

Il faut dans un second temps tenir compte du terme de transport. Il est bien connu qu'un tel terme, s'il n'est pas correctement discrétisé peut engendrer un surplus de diffusion numérique pouvant masquer l'essentiel des phénomènes physiques mis en jeu. Pour limiter cet effet, F. Boyer [11] a implémenté un schéma numérique du second ordre en temps et en espace issu des travaux de P. Rasetarinera [15]. On a donc, dans une première approche utilisé ce schéma pour discrétiser l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla \varphi = 0.$$

Un des inconvénients de cette méthode est que le stencil de ce schéma est assez large. Son implémentation est donc parfois délicate. Dans l'optique de traiter de la même manière les termes de transport en vitesse et en contrainte on a donc préféré utiliser un schéma de type Runge-Kutta d'ordre trois en temps que l'on va anti-diffuser en espace. Il est obtenu à partir du schéma de base suivant

$$\varphi^{n+1} = \varphi^{n+1/2} - \delta t\, K(\varphi^{n+1/2}) + \frac{1}{2}\delta t^2\, K^2(\varphi^{n+1/2}) - \frac{1}{6}\delta t^3\, K^3(\varphi^{n+1/2}),$$

où $K(f) = \mathbf{v}.\nabla f$. Une discrétisation spatiale de cet opérateur est proposée dans le paragraphe 2.2.

Dans tous les cas, μ^{n+1} est obtenu à partir de φ^{n+1} de la manière suivante

$$\mu^{n+1} = -\alpha^2 \Delta(\varphi^{n+1}) + F'(\varphi^{n+1}).$$

1.2 Discrétisation en temps de l'équation en vitesse

Puisque l'on considèrera par la suite des tests à vitesse relativement petite, le problème n'est pas raide et les termes non linéaires ne génèrent pas de problème. La méthode utilisée est donc implicite pour la pression et les termes visqueux, explicite pour les termes couplés :

$$\begin{cases} \rho^{n+1}\left(\dfrac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^n}{\delta t}\right) - \dfrac{1}{\mathcal{R}e}\,\mathrm{div}\,(2\eta^{n+1}(1-r^{n+1})D(\mathbf{v}^{n+1})) + \nabla p^{n+1} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^n - \rho^{n+1}Q(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) \\ \qquad\qquad + \rho^{n+1}\mathbf{g} + \mathcal{K}\dfrac{\rho_2^0-\rho_1^0}{\bar\rho}\dfrac{1-(\varphi^{n+1})^2}{2}\nabla\left(\dfrac{\mu^{n+1}}{\rho^{n+1}}\right) + \mathcal{K}\mu^{n+1}.\nabla\varphi^{n+1}, \\ \mathrm{div}\,(\mathbf{v}^{n+1}) = 0, \end{cases}$$

où l'on a simplifié $\rho(\varphi^{n+1})$, $\eta(\varphi^{n+1})$ et $r(\varphi^{n+1})$ en ρ^{n+1}, η^{n+1} et r^{n+1}. Concernant le terme d'inertie $Q(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v})$, on peut le discrétiser soit de façon explicite :

$$Q(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) = \mathbf{v}^n.\nabla\mathbf{v}^n,$$

soit en utilisant le schéma de Runge-Kutta qui est d'ordre plus élevé :

$$Q(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) = K(\mathbf{v}^n) - \frac{1}{2}\delta t\; K^2(\mathbf{v}^n) + \frac{1}{6}\delta t^2\; K^3(\mathbf{v}^n),$$

où $K(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}$. Cette discrétisation est donc très liée à la discrétisation en espace. On utilisera une méthode anti-diffusée proposée dans le paragraphe 2.2.

Finalement, une méthode de lagrangien augmenté permet de résoudre ce problème de Stokes [11, 35].

1.3 Discrétisation en temps de la loi constitutive

La dernière étape de la méthode à pas fractionnaires en temps consiste à déterminer $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ à l'instant t^{n+1} connaissant la vitesse et le paramètre d'ordre en t^{n+1}. Comme pour la discrétisation de l'équation de Cahn-Hilliard, le terme de transport de la loi constitutive est découplé et traité par une méthode de type Runge-Kutta. Il reste alors l'équation suivante

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - W(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.W(\mathbf{v}) - a\Big(D(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.D(\mathbf{v})\Big) + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\mathcal{W}e(\varphi)} = \frac{2\eta(\varphi)r(\varphi)}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e(\varphi)}D(\mathbf{v}). \qquad \text{(VI.1.1)}$$

La discrétisation que l'on a choisie ici a été guidée par trois idées. La première est que l'on veut que le modèle préserve la symétrie du tenseur des contraintes car cette propriété physique est essentielle (voir le chapitre 1). Ensuite, comme on désire effectuer des essais avec des fluides visco-élastiques, mais aussi avec des fluides newtoniens, il faut que le modèle est une bonne dégénérescence lorsque le nombre de Weissenberg tend vers zéro (ce qui correspond au cas d'un fluide newtonien). Enfin, l'aspect physique de ce modèle nous a amené à préférer un schéma tenant compte de la linéarité de l'équation en σ. Un schéma de type "exponential-fitting" (voir [31]) est bien adapté à notre cas.

Afin de présenter plus simplement les calculs, on écrit cette équation matricielle (VI.1.1) comme une équation vectorielle. En effectuant l'identification entre les matrices carrées de taille 2 et l'espace $\mathbb{R}^4$ à l'aide de l'application

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

l'équation (VI.1.1) devient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \left(\frac{1}{\mathcal{W}e(\varphi)} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a \right) . \boldsymbol{\sigma} = \frac{2\eta(\varphi) r(\varphi)}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e(\varphi)} D(\mathbf{v}),$$

où la matrice $\mathbf{M}_a$ est définie par

$$\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} 2a\partial_x u & w + az & w + az & 0 \\ -w + az & 0 & 0 & -w - az \\ -w + az & 0 & 0 & -w - az \\ 0 & w - az & w - az & 2a\partial_y v \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Sous cette forme, il est aisé de déterminer la valeur exacte de la solution à l'instant t^{n+1} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t^n + \delta t) = \; & e^{-\delta t \left(\frac{1}{\mathcal{W}e(\varphi^{n+1})} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} . \boldsymbol{\sigma}^n \\ & + \int_0^{\delta t} \frac{2\eta(\varphi(t^n + s)) r(\varphi(t^n + s))}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e(\varphi(t^n + s))} e^{(s - \delta t) \left(\frac{1}{\mathcal{W}e(\varphi(t^n + s))} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a(t^n + s) \right)} . D(\mathbf{v}(t^n + s)) ds. \end{aligned}$$

Ensuite, on approche l'intégrale du second membre (notée $\mathbf{I}$) en supposant que η, r et $\mathcal{W}e$ sont constants sur $[t^n, t^{n+1}]$, égaux respectivement à η^{n+1}, r^{n+1} et $\mathcal{W}e^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} & \approx \frac{2\eta^{n+1} r^{n+1}}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e^{n+1}} \left(\int_\Omega e^{(s - \delta t) \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} ds \right) . D(\mathbf{v}^{n+1}) \\ & \approx \frac{2\eta^{n+1} r^{n+1}}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e^{n+1}} \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)^{-1} \left(\mathbf{Id} - e^{-\delta t \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} \right) . D(\mathbf{v}^{n+1}), \end{aligned}$$

et en utilisant le développement limité de la fonction exponentielle, on a :

$$\mathbf{I} \approx \frac{2\eta^{n+1} r^{n+1}}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e^{n+1}} \delta t \; e^{-\delta t \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} . D(\mathbf{v}^{n+1}).$$

Ceci permet de déduire l'expression pour $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \; e^{-\delta t \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} . \boldsymbol{\sigma}^n + \frac{2\eta^{n+1} r^{n+1}}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e^{n+1}} \delta t \; e^{-\delta t \left(\frac{1}{\mathcal{W}e^{n+1}} \mathbf{Id} - \mathbf{M}_a^{n+1} \right)} . D(\mathbf{v}^{n+1}). \tag{VI.1.2}$$

La dernière étape de cette discrétisation consiste à exprimer l'exponentielle de la matrice $\mathbf{M}_a$. Un calcul simple montre que le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_a$ est donné par :

$$\det(\mathbf{M}_a - X\mathbf{Id}) = X^2(X^2 - 4\Omega), \quad \Omega = a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a^2 z^2 - w^2.$$

Plusieurs cas vont donc apparaître selon le signe de Ω.

• Considérons tout d'abord le cas $\Omega > 0$: Les valeurs propres de $\mathbf{M}_a$ sont 0 (valeur propre double), $2\sqrt{\Omega}$ et $-2\sqrt{\Omega}$. Les espaces propres associés sont donnés par :

$$E_0 = \text{Vect}\{e_1, e_2\}, \quad E_1 = \text{Vect}\{e_3\} \text{ et } \quad E_2 = \text{Vect}\{e_4\},$$

avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} w+az \\ 0 \\ -2a\partial_x u \\ w-az \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 2(w+az)^2 \\ (w+az)(\sqrt{\Omega}-a\partial_x u) \\ (w+az)(\sqrt{\Omega}-a\partial_x u) \\ 2a\partial_x u(a\partial_x u - \sqrt{\Omega}) \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w+az \\ -(w+az) \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 2(w+az)^2 \\ (w+az)(-\sqrt{\Omega}-a\partial_x u) \\ (w+az)(-\sqrt{\Omega}-a\partial_x u) \\ 2a\partial_x u(a\partial_x u + \sqrt{\Omega}) \end{pmatrix}.$$

Si on note Π_i la projection sur l'espace E_i parallèlement aux autres espaces propres de $\mathbf{M}_a$, alors on a :

$$e^{t\mathbf{M}_a} = \Pi_0 + e^{2\sqrt{\Omega}t}\Pi_1 + e^{-2\sqrt{\Omega}t}\Pi_2.$$

• Dans le cas $\Omega < 0$, les valeurs propres de $\mathbf{M}_a$ sont 0 (valeur propre double), $2i\sqrt{-\Omega}$ et $-2i\sqrt{-\Omega}$. Les mêmes résultats sont encore valides en remplaçant $\sqrt{\Omega}$ par $i\sqrt{-\Omega}$.

• Lorsque $\Omega = 0$, la matrice $\mathbf{M}_a$ est nilpotente d'ordre au plus 2 ($\mathbf{M}_a^3 = 0$) et on a directement l'expression $e^{t\mathbf{M}_a} = Id + t\mathbf{M}_a + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_a^2$.

Finalement, en exprimant les projecteurs Π_i, la résolvante s'écrit :

$$e^{t\mathbf{M}_a} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & s\alpha & s\alpha & s^2 \\ r\alpha & \alpha\beta & rs & s\beta \\ r\alpha & rs & \alpha\beta & s\beta \\ r^2 & r\beta & r\beta & \beta^2 \end{pmatrix},$$

où l'on rappelle que :

$$\Omega = a^2(\partial_x u)^2 + a^2 z^2 - w^2,$$

et

$$\alpha = \begin{cases} \text{ch}(t\sqrt{\Omega}) + a(\partial_x u)\text{sh}(t\sqrt{\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \geq 0, \\ \cos(t\sqrt{-\Omega}) + a(\partial_x u)\sin(t\sqrt{-\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \leq 0, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \text{ch}(t\sqrt{\Omega}) - a(\partial_x u)\text{sh}(t\sqrt{\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \geq 0, \\ \cos(t\sqrt{-\Omega}) - a(\partial_x u)\sin(t\sqrt{-\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \leq 0, \end{cases}$$

$$r = (az - w) \times \begin{cases} \text{sh}(t\sqrt{\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \geq 0, \\ \sin(t\sqrt{-\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \leq 0, \end{cases}$$

$$s = (az + w) \times \begin{cases} \text{sh}(t\sqrt{\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \geq 0, \\ \sin(t\sqrt{-\Omega})/\sqrt{\Omega} & \text{si } \Omega \leq 0. \end{cases}$$

Remarque VI.1.1

• *Lorsque $a = 0$, on a $\Omega = -w^2 < 0$ et une expression de la résolvante plus "simple" est :*

$$e^{t\mathbf{M}_a} = \begin{pmatrix} (\cos(wt))^2 & \cos(wt)\sin(wt) & \cos(wt)\sin(wt) & (\sin(wt))^2 \\ -\cos(wt)\sin(wt) & (\cos(wt))^2 & -(\sin(wt))^2 & \cos(wt)\sin(wt) \\ -\cos(wt)\sin(wt) & -(\sin(wt))^2 & (\cos(wt))^2 & \cos(wt)\sin(wt) \\ (\sin(wt))^2 & -\cos(wt)\sin(wt) & -\cos(wt)\sin(wt) & (\cos(wt))^2 \end{pmatrix}.$$

• *Il est important de remarquer que le schéma que l'on vient de décrire préserve la symétrie du tenseur des contraintes. En effet, cette propriété est vérifiée pour le modèle continu* (VI.1.1) *puisque aussi bien* $D(\mathbf{v})$, $-W(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.W(\mathbf{v})$ *que* $D(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.D(\mathbf{v})$ *sont des tenseurs symétriques. Pour le modèle discret, ceci résulte de l'identification matrice-vecteur : un vecteur de* $\mathbb{R}^4$ *sera dit symétrique lorsque sa deuxième et sa troisième composantes seront égales. Ainsi, il est facile de vérifier que si* $\boldsymbol{\sigma}^n$ *est symétrique, il en est de même pour* $e^{t\mathbf{M}_a}.\boldsymbol{\sigma}^n$. *De la même manière, puisque* $D(\mathbf{v}^{n+1})$ *est symétrique, le produit* $e^{t\mathbf{M}_a}.D(\mathbf{v}^{n+1})$ *l'est aussi, et donc* $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ *est symétrique (voir* (VI.1.2)*).*

• *Rappelons qu'une autre condition du cahier des charges est que le modèle dégénère bien pour un fluide newtonien (c'est à dire lorsque* $\mathcal{W}e$ *tend vers zéro). On peut vérifier que la façon choisie pour discrétiser l'intégrale* $\mathbf{I}$ *implique la convergence* $\lim_{\mathcal{W}e \to 0} \mathbf{I} = 0$.

2 Discrétisation en espace et stabilité

2.1 Traitement des conditions au bord

Le domaine est supposé rectangulaire et on utilise la méthode des différences finies. Le maillage (de type MAC) est formé d'une grille de $N \times M$ cellules uniformes où les inconnues sont prises soit au centre de la cellule (pour la pression, les termes de contrainte et le paramètre d'ordre) soit sur les milieux des cotés (pour la vitesse), voir la figure VI.2.1.

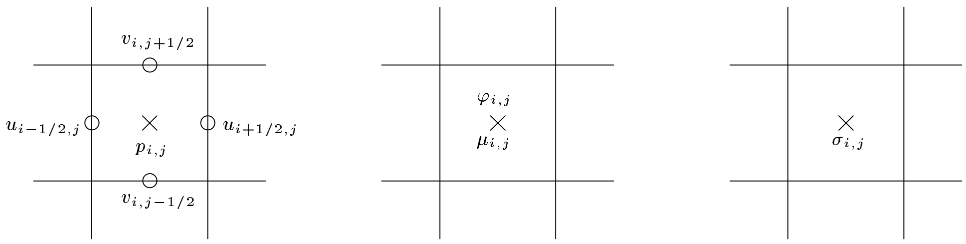


FIG. VI.2.1: Cellule (i, j) : position des inconnues

De plus, pour adapter très facilement la méthode aux nombreuses conditions au bord envisagées (voir le chapitre 7)

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_b \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0,$$

on introduit des inconnues artificielles autour du domaine physique. Par exemple, pour le paramètre d'ordre φ, on définit $\varphi_{0,j}, \varphi_{N+1,j}, \varphi_{i,0}, \varphi_{i,M+1}$ pour $j = 1, ..., M$ et $i = 0, ..., N+1$ (voir aussi la figure VI.2.2).
Enfin, pour prendre en compte la présence d'éventuels obstacles (pile de pont...), on a utilisé une méthode de domaine fictif et de pénalisation étudiée dans [11, 3].

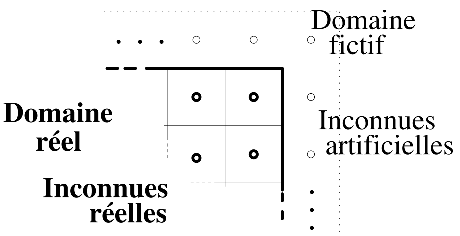


FIG. VI.2.2: Positions des inconnues réelles et fictives pour le paramètre d'ordre

2.2 Schéma pour les termes de convection

En ce qui concerne les termes de convection (aussi bien sur φ que sur $\mathbf{v}$ ou $\boldsymbol{\sigma}$) on a implémenté une discrétisation en temps de type Runge-Kutta (voir la partie 1 de ce chapitre). Une discrétisation spatiale de l'opérateur $K(f) = u.\nabla f$ est nécessaire. De plus il est important que cette discrétisation soit L^∞-stable et positive car physiquement, le paramètre d'ordre φ doit toujours rester entre -1 et 1. On utilise donc un schéma centré en espace muni de limiteur de flux de façon à vérifier de telles propriétés. Plus précisément, on prouve la proposition suivante :

Proposition VI.2.1
Sous la condition C.F.L. (Courant-Friedriech-Levy) suivante

$$\frac{\delta t}{\delta x} \max_{i,j} \left(|u_{i+1/2,j}| + |u_{i-1/2,j}|\right) + \frac{\delta t}{\delta y} \max_{i,j} \left(|v_{i,j+1/2}| + |v_{i,j-1/2}|\right) \leq 1,$$

le schéma défini par (VI.2.2) *et* (VI.2.3) *discrétise l'équation* $\partial_t \varphi + \mathbf{v}.\nabla\varphi = 0$ *et est positif.*

Remarque VI.2.1
- *Comme conséquence, on sait que pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$, *on a*

$$|\varphi^{n+1}|_p \leq |\varphi^n|_p,$$

où $|\cdot|_p$ *dénote la norme discrète usuelle dans* L^p.

- *Sous une condition un peu plus restrictive :*

$$\frac{\delta t}{\delta x} \max_{i,j} \left(|u_{i+1/2,j}| + |u_{i-1/2,j}|\right) + \frac{\delta t}{\delta y} \max_{i,j} \left(|v_{i,j+1/2}| + |v_{i,j-1/2}|\right) \leq \frac{1}{2}, \tag{VI.2.1}$$

on construit aussi un schéma positif pour l'équation de transport $\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla\mathbf{v} = 0$.

Preuve de la proposition VI.2.1 : On va d'abord commencer par construire le schéma dans le cas du transport de φ en dimension 1. Ensuite, on verra comment passer facilement au transport de φ par un champ de vitesse bidimensionnel. A la suite de cette démonstration, on se propose d'adapter la même méthode au transport de la vitesse $\mathbf{v}$.

Transport unidirectionnel de $\boldsymbol{\varphi}$: On se place dans le cas de la dimension 1 et on considère l'équation de transport d'une fonction φ par un champ de vecteur réel u : $\partial_t\varphi + u\partial_x\varphi = 0$. La méthode de Runge-Kutta est utilisée ici à l'ordre 3 et sous sa forme explicite. Elle s'écrit ainsi :

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - \delta t\, K(\varphi^n) + \frac{1}{2}\delta t^2\, K^2(\varphi^n) - \frac{1}{6}\delta t^3\, K^3(\varphi^n),$$

où $K(f) = u\partial_x f$. On préfère définir l'opérateur $L = Id - \delta t\, K$ de sorte que le schéma devienne

$$\varphi^{n+1} = \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{1}{2}L(\varphi^n) + \frac{1}{6}L^3(\varphi^n). \tag{VI.2.2}$$

En effet, sous cette forme φ^{n+1} est une combinaison convexe de φ^n, $L(\varphi^n)$ et $L^3(\varphi^n)$. Il suffit donc de trouver une discrétisation spatiale de L qui soit positive pour que cette propriété de positivité soit aussi vérifiée pour le schéma (VI.2.2).

On écrit une discrétisation centrée par différence finie de l'opérateur L. En utilisant la notation usuelle $u = u^+ - u^-$, $u^\pm \geq 0$, on écrit le schéma sous la forme :

$$\begin{aligned}\big(L(\varphi)\big)_i^{\text{cen}} = \varphi_i &- \frac{\lambda}{2}(u^+_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2} - u^+_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2})\\ &- \frac{\lambda}{2}(u^-_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2} - u^-_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2})\\ &- \lambda(u^+_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2} - u^-_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2}),\end{aligned}$$

où $\lambda = \delta t/\delta x$ et Δ représente ici l'opérateur aux différences discrètes. Par exemple, $\Delta\varphi_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Bien évidemment, cette discrétisation n'est pas L^∞-stable. Pour y remédier (voir par exemple [38]), on limite l'effet dû aux termes anti-diffusifs en considérant le schéma suivant :

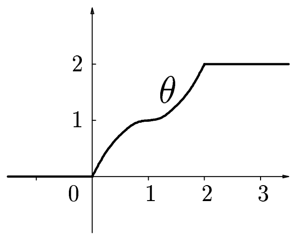
$$\begin{aligned}\big(L(\varphi)\big)_i = \varphi_i &- \frac{\lambda}{2}(\theta^+_{i+1/2}u^+_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2} - \theta^+_{i-1/2}u^+_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2})\\ &- \frac{\lambda}{2}(\theta^-_{i+1/2}u^-_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2} - \theta^-_{i-1/2}u^-_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2})\\ &- \lambda(u^+_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2} - u^-_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2}).\end{aligned} \tag{VI.2.3}$$

Les quantités $\theta^+_{i+1/2}$ et $\theta^-_{i-1/2}$ sont définies comme fonction du rapport de deux gradients consécutifs :

$$\begin{cases}\theta^+_{i+1/2} = \theta(p_{i+1/2}), \quad p_{i+1/2} = \Delta\varphi_{i-1/2}/\Delta\varphi_{i+1/2},\\ \theta^-_{i-1/2} = \theta(q_{i-1/2}), \quad q_{i-1/2} = \Delta\varphi_{i+1/2}/\Delta\varphi_{i-1/2}.\end{cases}$$

Il est connu qu'il existe de nombreux limiteurs θ (voir [38]). Dans toutes les applications, on utilise

$$\theta(p) = 1 - min\left(|1-p|, \frac{1}{|1-p|}\right)(1-p),$$



sa propriété essentielle étant qu'il vérifie

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+2}, \quad \forall(r,s) \in \mathbb{R}^2, \quad -2\alpha \leq \beta\,\frac{\theta(r)}{r} - \alpha\,\theta(s) \leq 2\beta. \tag{VI.2.4}$$

Pour étudier la stabilité d'un tel schéma, on l'écrit sous forme incrémentale :

$$L(\varphi)_i = \varphi_i + C_{i+1/2}\Delta\varphi_{i+1/2} - D_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2},$$

en définissant ici

$$\begin{cases}C_{i+1/2} = \lambda u^-_{i+1/2} - \dfrac{\lambda}{2}u^-_{i+1/2}\theta(q_{i+1/2}) + \dfrac{\lambda}{2}u^-_{i-1/2}\dfrac{\theta(q_{i-1/2})}{q_{i-1/2}},\\[2ex] D_{i-1/2} = \lambda u^+_{i-1/2} - \dfrac{\lambda}{2}u^+_{i+1/2}\dfrac{\theta(p_{i+1/2})}{p_{i+1/2}} + \dfrac{\lambda}{2}u^+_{i-1/2}\theta(p_{i-1/2}).\end{cases}$$

Une condition suffissante pour que le schéma soit stable est que $L(\varphi)_i$ soit une combinaison convexe de $\{\varphi_i\}_i$. Les conditions de positivité du schéma s'écrivent :

$$C_{i+1/2} \geq 0, \quad D_{i-1/2} \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{i+1/2} + D_{i-1/2} \leq 1, \quad 0 \leq i \leq N+1.$$

Les deux premières inégalités sont toujours vérifiées grâce à (VI.2.4) et la dernière l'est dès que, pour tout $0 \leq i \leq N+1$,

$$\lambda(|u_{i+1/2}| + |u_{i-1/2}|) \leq 1.$$

Transport multidimensionnel de φ : Lorsque le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est bidimensionnel, la méthode est similaire. L'opérateur L associé se discrétise dans les deux directions ainsi :

$$\begin{aligned}\big(L(\varphi)\big)_{i,j} = \varphi_{i,j} &- \frac{\lambda_x}{2}(\theta^+_{i+1/2,j}u^+_{i+1/2,j}\Delta\varphi_{i+1/2,j} - \theta^+_{i-1/2,j}u^+_{i-1/2,j}\Delta\varphi_{i-1/2,j})\\ &- \frac{\lambda_x}{2}(\theta^-_{i+1/2,j}u^-_{i+1/2,j}\Delta\varphi_{i+1/2,j} - \theta^-_{i-1/2,j}u^-_{i-1/2,j}\Delta\varphi_{i-1/2,j})\\ &- \lambda_x(u^+_{i-1/2,j}\Delta\varphi_{i-1/2,j} - u^-_{i+1/2,j}\Delta\varphi_{i+1/2,j})\\ &- \frac{\lambda_y}{2}(\theta^+_{i,j+1/2}u^+_{i,j+1/2}\Delta\varphi_{i,j+1/2} - \theta^+_{i,j-1/2}u^+_{i,j-1/2}\Delta\varphi_{i,j-1/2})\\ &- \frac{\lambda_y}{2}(\theta^-_{i,j+1/2}u^-_{i,j+1/2}\Delta\varphi_{i,j+1/2} - \theta^-_{i,j-1/2}u^-_{i,j-1/2}\Delta\varphi_{i,j-1/2})\\ &- \lambda_y(u^+_{i,j-1/2}\Delta\varphi_{i,j-1/2} - u^-_{i,j+1/2}\Delta\varphi_{i,j+1/2}).\end{aligned}$$

où $\lambda_x = \delta t/\delta x$, $\lambda_y = \delta t/\delta y$. Les autres notations prolongeant naturellement celles introduites dans le cas $1D$. Une mise sous forme incrémentale permet en utilisant la propriété (VI.2.4) du limiteur de montrer, exactement comme dans le cas monodimensionnel, la proposition VI.2.1.

Transport de $\mathbf{v}$: La difficulté nouvelle vient du fait que les composantes de la vitesse ne sont pas définies aux mêmes points (voir figure VI.2.1). Il faut donc adapter la méthode décrite précédemment. En particulier, il sera nécessaire d'interpoler les valeurs de u et v.

Comme dans le cas du transport de φ, il suffit de déterminer un schéma positif pour l'opérateur L défini ici par :

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \delta t\ \mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}.$$

Si on note $L^1(\mathbf{v}) = u\partial_x u + v\partial_y u$ la première composante de $\mathbf{L}(\mathbf{v})$ alors on discrétise $L^1(\mathbf{v})$ au point $(i-1/2, j)$ par :

$$\begin{aligned}\big(L^1(\mathbf{v})\big)_{i-1/2,j} =& u_{i-1/2,j} - \frac{\lambda_x}{2}(\theta^+_i u^+_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i,j} - \theta^+_{i-1}u^+_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i-1,j})\\ &- \frac{\lambda_x}{2}(\theta^-_i u^-_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i,j} - \theta^-_{i-1}u^-_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i-1,j})\\ &+ \lambda_x(u^-_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i,j} - u^+_{i-1/2,j}\Delta^i u_{i-1,j})\\ &- \frac{\lambda_y}{2}(\theta^+_{j+1/2}v^+_{i-1/2,j+1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j+1/2} - \theta^+_{j-1/2}v^+_{i-1/2,j-1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j-1/2})\\ &- \frac{\lambda_y}{2}(\theta^-_{j+1/2}v^-_{i-1/2,j+1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j+1/2} - \theta^-_{j-1/2}v^-_{i-1/2,j-1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j-1/2})\\ &+ \lambda_y(v^-_{i-1/2,j+1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j+1/2} - v^+_{i-1/2,j-1/2}\Delta^j u_{i-1/2,j-1/2}),\end{aligned}$$

où l'on a défini :

$$\begin{aligned}&\theta^+_i = \theta(r^+_i), \quad r^+_i = \frac{\Delta^i u_{i-1,j}}{\Delta^i u_{i,j}},\\ &\theta^-_{i-1} = \theta(s^-_{i-1}), \quad s^-_{i-1} = \frac{1}{r^+_i},\\ &\theta^+_{j+1/2} = \theta(r^+_{j+1/2}), \quad r^+_{j+1/2} = \frac{\Delta^j u_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta^j u_{i-1/2,j+1/2}},\\ &\theta^-_{j-1/2} = \theta(s^-_{j-1/2}), \quad s^-_{j-1/2} = \frac{1}{r^+_{j+1/2}}.\end{aligned}$$

Les différences Δ étant données par :

$$\Delta^i u_{i,j} = u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}, \quad \Delta^j u_{i-1/2,j-1/2} = u_{i-1/2,j} - u_{i-1/2,j-1},$$

et les termes interpolés en vitesse de façon linéaire, par exemple

$$v_{i-1/2,j-1/2} = \frac{v_{i,j-1/2} + v_{i-1,j-1/2}}{2}.$$

Comme dans la démonstration de la proposition VI.2.1, on va tout d'abord écrire le schéma sous forme incrémentale :

$$\big(L^1(\mathbf{v})\big)_{i-1/2,j} = u_{i-1/2,j} + C\Delta^i u_{i,j} - D\Delta^i u_{i-1,j} + \widetilde{C}\Delta^j u_{i-1/2,j+1/2} - \widetilde{D}\Delta^j u_{i-1/2,j-1/2}.$$

On a posé :

$$\begin{cases} C = \dfrac{\lambda_x}{2} u^-_{i-1/2,j}\left(2 + \left(\dfrac{\theta(s^-_{i-1})}{s^-_{i-1}} - \theta(s^-_i)\right)\right), \\ D = \dfrac{\lambda_x}{2} u^+_{i-1/2,j}\left(2 + \left(\dfrac{\theta(r^+_i)}{r^+_i} - \theta(r^+_{i-1})\right)\right), \\ \widetilde{C} = \lambda_y v^-_{i-1/2,j+1/2} + \dfrac{\lambda_y}{2}\left(v^-_{i-1/2,j-1/2}\dfrac{\theta(s^-_{j-1/2})}{s^-_{j-1/2}} - v^-_{i-1/2,j+1/2}\theta(s^-_{j+1/2})\right), \\ \widetilde{D} = \lambda_y v^+_{i-1/2,j-1/2} + \dfrac{\lambda_y}{2}\left(v^+_{i-1/2,j+1/2}\dfrac{\theta(r^+_{j+1/2})}{r^+_{j+1/2}} - v^+_{i-1/2,j-1/2}\theta(r^+_{j-1/2})\right). \end{cases}$$

Par construction du limiteur θ les coefficients C, D, $\widetilde{C}$ et $\widetilde{D}$ sont clairement positifs. De plus la propriété (VI.2.4) implique

$$C + D + \widetilde{C} + \widetilde{D} \leq 2\lambda_x |u_{i+1/2,j}| + \lambda_y(|v_{i,j-1/2}| + |v_{i-1,j-1/2}| + |v_{i,j+1/2}| + |v_{i-1,j+1/2}|).$$

Une condition suffissante pour montrer la positivité du schéma (du moins en ce qui concerne la première composante du schéma) est donc

$$\lambda_x \max_{i,j}\left(|u_{i+1/2,j}| + |u_{i-1/2,j}|\right) + \lambda_y \max_{i,j}\left(|v_{i,j+1/2}| + |v_{i,j-1/2}|\right) \leq \frac{1}{2}.$$

On retrouve la même condition C.F.L. que dans la proposition VI.2.1 à ceci prés que l'on a $1/2$ dans le membre de droite. Ceci est dû au fait que l'on a interpolé les valeurs de la vitesse. Il est aussi facile de montrer le même résultat concernant la seconde composante de $\mathbf{L}(\mathbf{v})$.

2.3 Propriété de stabilité du schéma exponentiel

On montre dans ce paragraphe que le schéma introduit pour discrétiser la loi constitutive (paragraphe 1.3) est stable sous certaines conditions. Afin de se concentrer sur l'étude du schéma exponentiel, on se place dans le cas monophasique ($\varphi = 1$) et on prouve donc le résultat pour un couplage de la loi constitutive avec les équations de Navier-Stokes.

Rappelons tout d'abord que pour le modèle continu, à notre connaissance, aucune preuve ne justifie l'existence globale d'une solution dans le cas général. Néanmoins, un cas intéressant est celui où le coefficient rhéologique a est nul ; il correspond au choix de la dérivée corotationnelle en temps. Cas pour lequel on sait que le problème continu admet des solutions globales en temps, voir par exemple le théorème III.1.2 au chapitre

3 ou les articles [22, 23, 58]. On montre donc un résultat du même type concernant le modèle discret. On va voir que l'hypothèse $a = 0$ est essentielle puisqu'elle implique l'antisymétrie de $\mathbf{M}_0$, la matrice $e^{t\mathbf{M}_0}$ étant alors unitaire...

Le système continu étudié s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla \mathbf{v} - \dfrac{2(1-r)}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}\,(D(\mathbf{v})) + \nabla p - \operatorname{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \operatorname{div}\,(\mathbf{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla \boldsymbol{\sigma} + \left(\dfrac{1}{\mathcal{W}e}\mathbf{Id} - \mathbf{M}_0\right).\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{2r}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e} D(\mathbf{v}). \end{cases} \tag{VI.2.5}$$

Au cours du paragraphe 1, on a proposé un schéma de type exponentiel. On se consacre ici à l'étude de la stabilité du schéma semi-discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^n}{\delta t} = \big(\mathbf{v}.\nabla \mathbf{v}\big)^n, \\ \dfrac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}}{\delta t} - \dfrac{2(1-r)}{\mathcal{R}e} \operatorname{div}\,(D(\mathbf{v}^{n+1})) + \nabla p^{n+1} = \operatorname{div}\,(\boldsymbol{\sigma}^n), \\ \operatorname{div}\,(\mathbf{v}^{n+1}) = 0, \quad \mathbf{v}^{n+1} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\sigma}^n}{\delta t} = \big(\mathbf{v}.\nabla \boldsymbol{\sigma}\big)^n, \\ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = e^{-\delta t(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0)} \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{2r\ \delta t}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e} e^{-\frac{\delta t}{\mathcal{W}e}} e^{\delta t \mathbf{M}_0} D(\mathbf{v}^{n+1}). \end{cases} \tag{VI.2.6}$$

Dans ce système, les symboles $\big(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}\big)^n$ et $\big(\mathbf{v}.\nabla\boldsymbol{\sigma}\big)^n$ désignent la discrétisation spatiales qui ont été décrites dans la partie précédente. On n'explicite pas la discrétisation spatiale naturelle des autres termes.

Proposition VI.2.2
Le schéma défini par (VI.2.6) *est L^2-stable sous les conditions* (VI.2.1) *et*

$$\delta t \leq \frac{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}{4r^2}. \tag{VI.2.7}$$

Preuve : Premièrement, la remarque VI.2.1 permet d'affirmer que la condition (VI.2.1) implique en particulier :

$$|\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2 \leq |\mathbf{v}^n|_2, \quad |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2 \leq |\boldsymbol{\sigma}^n|_2. \tag{VI.2.8}$$

Ensuite, on effectue le produit scalaire discret dans L^2 de la seconde équation de (VI.2.6) par $\mathbf{v}^{n+1}$. Il vient :

$$\frac{|\mathbf{v}^{n+1}|_2^2 - |\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{2(1-r)}{\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 = -(\boldsymbol{\sigma}^n, D(\mathbf{v}^{n+1})).$$

L'inéqualité de Young fournit l'estimation :

$$\big|(\boldsymbol{\sigma}^n, D(\mathbf{v}^{n+1}))\big| \leq \frac{1-r}{2\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 + \frac{\mathcal{R}e}{2(1-r)}|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2,$$

et on a donc

$$\frac{|\mathbf{v}^{n+1}|_2^2 - |\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{3(1-r)}{2\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 \leq \frac{\mathcal{R}e}{2(1-r)}|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2. \tag{VI.2.9}$$

Considérons à présent la dernière équation du système (VI.2.6), celle concernant $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$. En lui retranchant $\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}$ puis en effectuant le produit scalaire avec $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$, on obtient l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} &= \frac{1}{\delta t}\int_\Omega \left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \\ &\quad + \int_\Omega \frac{2r}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e} e^{-\frac{\delta t}{\mathcal{W}e}} e^{\delta t \mathbf{M}_0} D(\mathbf{v}^{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}^{n+1}.\end{aligned}$$

En réalité, les termes "intégrales" sont des intégrales discrètes sur le maillage ("somme" sur toutes les mailles). Par soucis de simplifications et surtout puisque ce n'est pas nécessaire, on n'explicite pas ici de tels termes.

Pour estimer la première intégrale, on utilise le fait que $e^{\delta t \mathbf{M}_0}$ est une matrice unitaire :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma}^{n+1} &= \int_\Omega \left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} : (\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \int_\Omega \left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \frac{1}{2}\left|\left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}\right|_2^2 \\ &\quad + \int_\Omega \left(e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)} - \mathbf{Id}\right)\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \frac{1}{2}\left|e^{-\delta t\left(\frac{1}{\mathcal{W}e} - \mathbf{M}_0\right)}\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}\right|_2^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 - \frac{1 - e^{-\frac{2\delta t}{\mathcal{W}e}}}{2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2.\end{aligned}$$

D'après l'inéqualité de Young, on a :

$$\frac{2r}{\mathcal{R}e\mathcal{W}e} e^{-\frac{\delta t}{\mathcal{W}e}} \left|(e^{\delta t \mathbf{M}_0} D(\mathbf{v}^{n+1}), \boldsymbol{\sigma}^{n+1})\right| \leq \frac{1-r}{2\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2,$$

et on trouve donc l'estimation suivante :

$$\frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{1 - e^{-\frac{2\delta t}{\mathcal{W}e}}}{2\delta t}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \leq \frac{1-r}{2\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2. \tag{VI.2.10}$$

Rassemblant les estimations (VI.2.9) et (VI.2.10), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{|\mathbf{v}^{n+1}|_2^2 - |\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{1-r}{\mathcal{R}e}|D(\mathbf{v}^{n+1})|_2^2 + \frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{1 - e^{-\frac{2\delta t}{\mathcal{W}e}}}{2\delta t}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \\ &\quad \leq \frac{\mathcal{R}e}{2(1-r)}|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2 + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 \\ &\quad \leq \frac{\mathcal{R}e}{2(1-r)}|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2 + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}(|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2) + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2.\end{aligned} \tag{VI.2.11}$$

Ainsi, en supposant (VI.2.7), où ce qui revient au même :

$$\frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2} \leq \frac{1}{4\delta t}, \tag{VI.2.12}$$

on en déduit

$$\frac{|\mathbf{v}^{n+1}|_2^2 - |\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{2\delta t} + \frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2}{4\delta t} \leq \frac{\mathcal{R}e}{2(1-r)}|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2 + \frac{2r^2}{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}|\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2.$$

En effet, si $|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2 \geq |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2$ le résultat est immédiat d'après (VI.2.11) et (VI.2.12), et si au contraire $|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2 < |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2$, il suffit tout simplement de remarquer que l'on a ajouté à l'estimation (VI.2.9) le terme $(|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2)/4\delta t$ qui est négatif.

Finalement, on utilise (VI.2.8), pour en déduire :

$$\frac{|\mathbf{v}^{n+1}|_2^2 - |\mathbf{v}^n|_2^2}{2\delta t} + \frac{|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}|_2^2 - |\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2}{4\delta t} \leq C|\boldsymbol{\sigma}^n|_2^2.$$

En utilisant un lemme de Gronwall discret, on obtient une borne aussi bien sur $|\mathbf{v}^n|_2$ que sur $|\boldsymbol{\sigma}^n|_2$, indépendante du pas de temps. ■

Remarque VI.2.2

• *Avec des paramètres usuels comme par exemple* $r = 0.9$, $\mathcal{W}e = 10$ *et* $\mathcal{R}e = 10$, *la seconde condition* (VI.2.7) *s'écrit* $\delta t \lesssim 30$ *ce qui n'est pas contraignant.*

• *De plus, il est essentiel de remarquer que pour un fluide newtonien, cette condition disparait. En effet, le paramètre de retard* r *est défini par (voir chapitre 2) :*

$$r = 1 - \frac{\widetilde{\mathcal{W}e}}{\mathcal{W}e}$$

où $\widetilde{\mathcal{W}e}$ *est le temps de retard (*$\mathcal{W}e$ *étant le temps de relaxation). On dit qu'un fluide est newtonien [49] lorsque* $\widetilde{\mathcal{W}e} = \mathcal{W}e \to 0$. *Ainsi, dans cette situation, on a bien :*

$$\frac{(1-r)\mathcal{R}e\mathcal{W}e^2}{4r^2} = +\infty.$$

Chapitre 7

Applications et résultats

1 Canal sous cisaillement

1.1 Cas monophasique

Cette application numérique a pour but de confirmer la différence de comportement entre les fluides visco-élastiques et les fluides newtoniens. Le test est issu d'un processus expérimental très courant en physique. Il est généralement utilisé pour mesurer des grandeurs physiques telles que la viscosité, le temps de relaxation... Il existe d'ailleurs de nombreux types de rhéomètres (ou viscomètres) : à cône, à plaques parallèles, à cylindres concentriques... (voir [71]). C'est ce dernier appareil, appelé aussi "cellule de Couette", qui va nous intéresser.

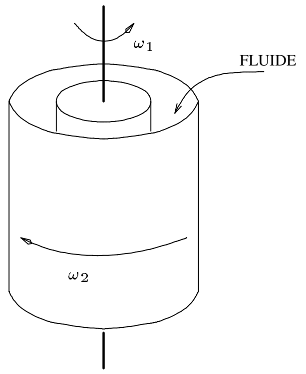


FIG. VII.1.1: Cellule de Couette : dispositif expérimentale

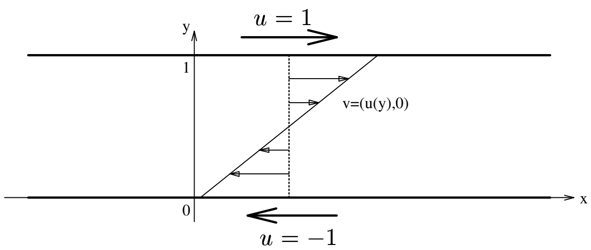


FIG. VII.1.2: Conditions au bord pour la vitesse dans une cellule de Couette plane

On considère l'écoulement d'un fluide (composé pour le moment d'une seule phase) confiné entre deux cylindres concentriques comme présenté à la figure VII.1.1. On impose ici le taux de cisaillement, plus précisement on fixe les vitesses angulaires ω_1 et $-\omega_2$ des cylindres intérieurs et extérieurs. Il faut savoir que dans les expériences de rhéologie, on peut soit fixer ce taux de cisaillement, soit imposer la contrainte sur les deux cylindres, ce qui bien sûr peut fournir de nombreux autres résultats. En pratique, l'espace entre les deux cylindres est très petit devant les rayons des cylindres de sorte qu'il est raisonnable de négliger la courbure et de se ramener à un modèle bidimensionnel de type canal (figure VII.1.2).

La théorie des fluides newtoniens montre que asymptotiquement en temps, la solution converge vers une solution stationnaire. Cette solution stationnaire étant donnée par un profil de vitesse linéaire ne dépendant que de la variable transverse (voir figure VII.1.2 et l'essai numérique représenté figure VII.1.5). Pour un fluide visco-élastique, on va voir qu'il existe une plage de paramètres pour lesquels le comportement asymptotique est très différent.

1.1.1 Cadre théorique

Plus précisement, dans le cas monophasique stationnaire ($\varphi = 1$ et $\partial_t = 0$), les équations que l'on a dérivé s'écrivent

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) - 2(1-r)\,\mathrm{div}\,(D(\mathbf{v})) + \nabla\mathcal{R}e\,p = \mathrm{div}\,\mathcal{R}e\,\boldsymbol{\sigma}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \\ \mathcal{W}e\big(\mathbf{v}.\nabla\boldsymbol{\sigma} - W(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.W(\mathbf{v}) - a(D(\mathbf{v}).\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}.D(\mathbf{v}))\big) + \boldsymbol{\sigma} = \dfrac{2r}{\mathcal{R}e}D(\mathbf{v}), \end{cases} \tag{VII.1.1}$$

Elles correspondent à un fluide visco-élastique obéissant à la loi de Jeffrey en position stationnaire. Rappelons que le coefficient a varie entre -1 et 1 alors que le paramètre de retard r varie entre 0 et 1. Le cas $r = 0$ correspond à un fluide newtonien alors que le cas $r = 1$ correspond au modèle de Maxwell (dans ce cas, voir la remarque à la fin de ce paragraphe).

La géométrie d'un cellule de Couette plane nous incite à chercher des solutions stationnaires invariantes par translations le long de l'axe $(0x)$ (voir figure VII.1.2). Il est donc naturel de chercher des solutions au problème (VII.1.1) ne dépendant que de la variable y. Plus exactement on a

Proposition VII.1.1
- *Si* $0 \le r < 8/9$ *alors le problème* (VII.1.1) *admet une unique solution* $(\mathbf{v}_N, p_N, \boldsymbol{\sigma}_N)$ *ne dépendant que de* y*. En outre,* $\mathbf{v}_N$ *est linéaire en* y*.*
- *Si* $8/9 \le r < 1$ *alors il existe des paramètres physiques* a *et* $\mathcal{W}e$ *pour lesquels on a une infinité de solutions ne dépendant que de* y*.*
- *Dans le premier cas la solution linéaire en vitesse (qui est l'unique solution !) est linéairement stable, dans le second cas il existe des paramètres physiques* a *et* $\mathcal{W}e$ *pour lesquels elle ne l'est pas.*

Preuve : Puisque l'on cherche des solutions ne dépendant que de la variable y, la relation d'incompressibilité sur le champ de vitesse montre que dans ce cas on peut prendre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\sigma})$ sous la forme

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{R}e}\begin{pmatrix} \alpha(y) & \beta(y) \\ \beta(y) & \gamma(y) \end{pmatrix}.$$

En réécrivant le système (VII.1.1), on obtient

$$-(1-r)u' = \beta - C_0, \tag{VII.1.2a}$$
$$\mathcal{R}e\,p' = \gamma' \tag{VII.1.2b}$$
$$\mathcal{W}e(1-a)\beta u' + \alpha = 0, \tag{VII.1.2c}$$
$$\mathcal{W}e\big((1-a)\gamma - (1+a)\alpha\big)u' + 2\beta = 2ru', \tag{VII.1.2d}$$
$$-\mathcal{W}e(1+a)\beta u' + \gamma = 0. \tag{VII.1.2e}$$

Les deux premières équations doivent être interprétées comme des relations de continuité de la contrainte totale verticale :

$$(2(1-r)D(\mathbf{v}) + \mathcal{R}e\,\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{R}e\,p\,\mathbf{Id}).\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-r)u' + \beta \\ -\mathcal{R}e\,p + \gamma \end{pmatrix}.$$

Ce système est complété par les conditions aux bords

$$u(0) = -1 \quad \text{et} \quad u(1) = 1.$$

A l'aide de ces conditions, on peut déterminer plus précisement la constante de saut C_0. En effet, en intégrant (VII.1.2a) sur $[0, 1]$ on a

$$C_0 = \int_0^1 \beta + 2(1 - r). \tag{VII.1.3}$$

A l'aide des équations (VII.1.2c) et (VII.1.2e), on détermine α et γ en fonction de β et de u' :

$$\mathcal{W}e(1 + a)\alpha = -k^2 \beta u', \quad \mathcal{W}e(1 - a)\gamma = k^2 \beta u' \quad \text{où} \quad k^2 = \mathcal{W}e^2(1 - a^2).$$

Puis en utilisant (VII.1.2a) on exprime β en fonction de u', ce qui nous permet (avec (VII.1.2d)) d'avoir une seule équation en la dérivée u' (dépendant néanmoins de la constante C_0) :

$$-(1 - r)k^2(u')^3 \;+\; C_0 k^2 (u')^2 \;-\; (u') \;+\; C_0 \;=\; 0.$$

Afin de simplifier les calculs, on va réécrire ce trinôme du troisième degrè sous une forme plus simple. En effet, si on le multiplie par k, et si on pose $Y = ku'(y)$ et $D = kC_0$ alors on a (voir [45, 55] pour des calculs similaires) :

$$P_D := -(1 - r)Y^3 \;+\; DY^2 \;-\; Y \;+\; D \;=\; 0. \tag{VII.1.4}$$

De plus, dès que l'on connait les valeurs de Y, c'est à dire de u', alors d'après (VII.1.2) on peut facilement en déduire toutes les composantes du tenseur des contraintes :

$$\beta = \frac{ru'}{1 + k^2(u')^2}, \quad \alpha = -\mathcal{W}e(1 - a)\beta u', \quad \gamma = \mathcal{W}e(1 + a)\beta u'.$$

Il nous suffit donc de connaitre les racines du trinome P_D. Comme le font C. Guillopé et J.C. Saut dans [45], si on trace la fonction

$$f_r(Y) := Y(1 + (1 - r)Y^2)/(1 + Y^2)$$

alors les racines réelles de P_D sont les intersections de la courbe représentative de f_r et de la droite horizontale d'ordonnée D (voir la figure VII.1.3). Toutes les racines réelles de P_D ont le même signe (qui correspond au signe de D), on peut supposer $D > 0$. En effet, dans le cas contraire, P_D aurait toutes ses racines réelles négatives et la vitesse u serait décroissante, ce qui contredit $u(0) = -1$ et $u(1) = 1$. L'équation (VII.1.4) admet alors trois racines distinctes réelles si et seulement si $r \geq 8/9$ et $D^+ < D < D^-$, $D^\pm$ étant données par (voir figure VII.1.3) :

$$D^\pm = f_r(Y^\pm), \quad \text{où} \quad (Y^\pm)^2 = \frac{3r - 2 \pm \sqrt{r(9r - 8)}}{2(1 - r)}, \; Y^\pm \geq 0. \tag{VII.1.5}$$

Etude du cas d'une seule solution réelle : C'est en particulier le cas lorsque $r < 8/9$. La dérivée u' est constante sur $]0; 1[$ et les conditions aux limites lui impose la valeur $u' = 2$. On en déduit toutes les autres composantes de la contrainte :

$$\begin{aligned}
u_N(y) &= 2y - 1,\\
\beta_N(y) &= \frac{2r}{1 + 4k^2},\\
\alpha_N(y) &= -\mathcal{W}e(1 - a)\frac{4r}{1 + 4k^2},\\
\gamma_N(y) &= \mathcal{W}e(1 + a)\frac{4r}{1 + 4k^2}.
\end{aligned}$$

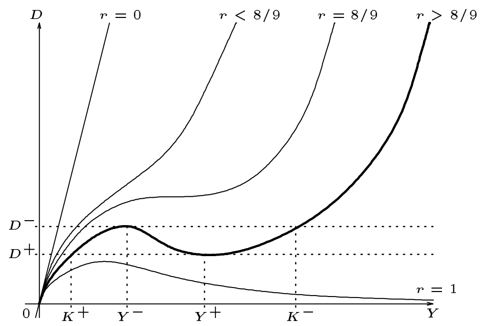


FIG. VII.1.3: fonction f_r pour différentes valeurs du paramètre r

Dans ce cas, on retrouve la solution stationnaire en vitesse correspondant au fluide newtonien (i.e. $r = 0$). Le premier point de la proposition VII.1.1 est donc démontré.

Etude du cas de plusieurs solutions réelles distinctes : On montre que dans ce cas, quitte à bien choisir les valeurs de a et de $\mathcal{W}e$, il peut exister des solutions stationnaires dont la vitesse n'est plus linéaire mais affine par morceaux. Plus précisement, on prouve que si $Y_1 < Y_2 < Y_3$ sont les trois distinctes racines du trinome P_D alors il existe une partition de $[0; 1]$ en trois ensembles (non forcement connexes !) de mesure μ_i ($i \in \{1; 2; 3\}$) telle que sur chacun de ces ensembles, $u' = Y_i$ (voir la figure VII.1.4).

Pour construire une telle solution, supposons que la vitesse u soit donnée par un profil affine par morceaux du type :

$$\begin{cases} u(0) = -1, \\ u'(y) = \dfrac{Y_1}{k} \text{ sur } [0, \mu_1], \quad u'(y) = \dfrac{Y_2}{k} \text{ sur } [\mu_1, \mu_1 + \mu_2], \quad u'(y) = \dfrac{Y_3}{k} \text{ sur } [\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3]. \end{cases}$$

Cette vitesse est solution du problème stationnaire s'il existe $(\mu_i)_{i\in\{1;2;3\}} \in (\mathbb{R}^+)^3$ tel que

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 2k, \\ \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \mu_3 Z_3 = D - 2k(1 - r), \end{cases} \tag{VII.1.6}$$

où $Z_i = rY_i/(1 + Y_i^2)$. La première équation imposant aux trois ensembles de recouvrir $[0; 1]$, la seconde correspondant à $u(1) = 1$ et la dernière étant équivalente à (VII.1.3).

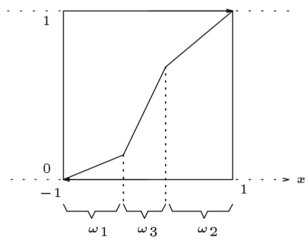


FIG. VII.1.4: exemple d'un profil de vitesse stationnaire

Il nous suffit donc de prouver que le système (VII.1.6) admet des solutions réelles positives. On va procéder en trois étapes. Tout d'abord (VII.1.6) étant un système linéaire, il est naturel de calculer son déterminant. On va voir qu'il est nul. Ainsi, l'existence de solution dépend du second membre du système. Une fois assuré que des solutions réelles existent, on montre qu'il y en a dont toutes les composantes sont positives.

• Déterminant nul : En écrivant le système linéaire sous la forme $\mathcal{A}\mu = b$, la première chose à faire est de calculer le déterminant de la matrice $\mathcal{A}$:

$$\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

En otant la première colonne aux deux suivantes, et en remarquant que

$$Z_2 - Z_1 = r(Y_2 - Y_1)\frac{1 - Y_1Y_2}{(1+Y_1^2)(1+Y_2^2)} \quad \text{(idem pour } Z_3 - Z_1\text{)},$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{A}) &= r^2(Y_2 - Y_1)(Y_3 - Y_1)\left(\frac{1 - Y_1Y_3}{(1+Y_1^2)(1+Y_3^2)} - \frac{1 - Y_1Y_2}{(1+Y_1^2)(1+Y_2^2)}\right) \\ &= r^2\frac{(Y_2 - Y_1)(Y_3 - Y_1)(Y_2 - Y_3)}{(1+Y_1^2)(1+Y_2^2)(1+Y_3^2)}\Big(Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_1Y_2Y_3\Big).\end{aligned}$$

Or, la somme des trois racines est égale à leur produit (d'après les relations entre racines et coefficients du polynôme P_D). On a donc

$$\det(\mathcal{A}) = 0.$$

• Second membre dans l'image : Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ est dans l'image de $\mathcal{A}$ si et seulement s'il est orthogonal au noyau de l'adjoint de $\mathcal{A}$. On va donc dans un premier temps, déterminer le noyau de $\mathcal{A}^*$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(\mathcal{A}^*) &\iff a + bY_i + cZ_i = 0 \quad \text{pour } i \in \{1,2,3\} \\ &\iff bY_i^3 + aY_i^2 + (b + rc)Y_i + a = 0 \quad \text{pour } i \in \{1,2,3\}.\end{aligned}$$

Mais comme les Y_i sont exactement les trois racines (distinctes) du polynôme $-(1-r)Y^3 + DY^2 - Y + D$, en identifiant les coefficients, on en déduit que le noyau de $\mathcal{A}^*$ est de dimension 1 :

$$\ker(\mathcal{A}^*) = \text{Vect}\begin{pmatrix} D \\ -(1-r) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est toujours orthogonal au second membre du système (VII.1.6). Une remarque importante est que ceci est vrai même si on impose des vitesses différentes aux bords du domaine. En effet, en imposant $u(0) = -U$ et $u(1) = U$, seul le second membre de (VII.1.6) aurait été modifié. Sa deuxième composante s'écrit $2kU$ et sa dernière composante $D - 2kU(1-r)$. Ce second membre est encore orthogonal au noyau $\ker(\mathcal{A}^*)$. Dans tous les cas, ceci montre que le système admet une droite de $\mathbb{R}^3$ comme ensemble de solution.

• Solutions positives ? Bien que l'on ait toutes les solutions du système, il faut vérifier qu'il existe toujours une solution dont toutes ses composantes sont positives. Pour cela, il suffit de prouver que la droite solution passe dans le huitième d'espace $(\mathbb{R}^+)^3$. On remarque facilement que cette condition équivaut au fait que la droite coupe l'un des quarts de plan $\{\mu_i = 0\} \cap (\mathbb{R}^+)^3$.

Or, il est très facile de trouver l'intersection de la droite solution avec le plan $\{\mu_1 = 0\}$: il suffit de résoudre le système (VII.1.6) lorsque $\mu_1 = 0$:

$$\begin{cases} \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 2k. \end{cases}$$

En faisant la même étude sur l'intersection avec les deux autres plans $\{\mu_i = 0\}$, on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} (Y_2-2k)/(Y_2-Y_1) \\ (2k-Y_1)/(Y_2-Y_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (Y_3-2k)/(Y_3-Y_1) \\ 0 \\ (2k-Y_1)/(Y_3-Y_1) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ (Y_3-2k)/(Y_3-Y_2) \\ (2k-Y_2)/(Y_3-Y_2) \end{pmatrix}$$

sont trois solutions particulières de (VII.1.6). On remarque alors que l'une de ces solutions a toutes ses composantes positives si et seulement si $Y_1 \leq 2k \leq Y_3$ (rappelons que l'on a ordonné les racines : $Y_1 < Y_2 < Y_3$).

On vient de voir que lorsque le polynôme P_D a trois racines réelles distinctes, alors en choisissant $2k$ entre les racines, il existe une partition de $[0;1]$ en trois sous-ensembles telle que sur chacun de ces sous-ensembles, u' soit constante, égale à l'une des trois racines. Par ailleurs, on a montré avant que si $r > 8/9$ et si $D^+ < D < D^-$ alors il y a effectivement trois racines réelles distinctes. On peut donc énoncer :

Lemme VII.1.1
Si $K^+ < 2k < K^-$ alors il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que :

ι) *Le polynôme P_D admet 3 racines distinctes* $\quad Y_1 < Y_2 < Y_3$,

$\iota\iota$) $\quad Y_1 \leq 2k \leq Y_3$.

Les valeurs de $K^\pm$ (correspondant aux racines simples de $P_{D^\pm}$, voir figure VII.1.3) étant données par

$$K^\pm = \frac{D^\pm}{(1-r)(Y^\pm)^2}.$$

Ce lemme permet donc de conclure la preuve du second point de la proposition VII.1.1.

Remarque VII.1.1
Notons tout d'abord que pour $K^+ < 2k < K^-$, on a obtenu une solution stationnaire dont le profil de vitesse n'est pas linéaire, ce qui n'est pas le cas pour un fluide newtonien, mais aussi qu'il est très facile de construire maintenant une infinité de telles solutions.

En effet, considérons D et (μ_1, μ_2, μ_3) une solution positive non triviale du système précédent. Soit ω_i une réunion d'intervalles de mesure totale μ_i et tels que :

$$[0,1] = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3.$$

Alors on peut définir la fonction u par

$$u(0) = -1,\ u'(y) = \mu_i/k \text{ si } y \in \omega_i,$$

ce qui fournit une autre solution stationnaire linéaire par morceaux.

Le dernier point de la proposition VII.1.1 concerne la stabilité de la solution "particulière" qui est linéaire en vitesse. On vient de montrer que la solution attendue (linéaire en vitesse) n'était pas la seule solution stationnaire monodimensionnelle. Plusieurs auteurs ont étudié sa stabilité et on a dans cette partie "vérifié" numériquement leurs résultats de (in-)stabilité. Tout d'abord rappelons le résultat principal à ce sujet (C. Guillopé et J.C. Saut [45], p.396) :

Proposition VII.1.2

- *Si* $0 \leq r < 8/9$ *alors la solution* $(v_N, \alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$ *est linéairement stable.*
- *Si* $8/9 \leq r < 1$ *alors* $(v_N, \alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$ *est linéairement stable si et seulement si* $0 \leq k < Y_-$ *ou* $k > Y_+$.

Les valeurs de $Y^{\pm}$ *étant données par* (VII.1.5), *voir aussi la figure VII.1.3.*

Il faut aussi remarquer que d'autres résultats de stabilité sont prouvés dans [45], concernant en particulier la stabilité au sens de Lyapounov. Les énoncés sont du même type : stabilité de la solution linéaire seulement pour k ou r petit.

Remarque VII.1.2

Dans le cas d'un fluide de Maxwell (c'est à dire lorsque $r = 1$*), il est facile de vérifier que l'on a un comportement semblable. En effet, dans ce cas on trouve un polynôme de degré* 2 *dont* u' *doit être solution (comparer ce polynôme au polynôme* P_D*, équation* (VII.1.4)*) :*

$$DY^2 - Y + D = 0.$$

Ce polynôme n'admet des solutions (réelles) que pour $|D| \leq 1/2$. *Si on cherche des solutions constantes par morceaux (pour* u'*), il faut donc résoudre dans* $\mathbb{R}^+$ *le système suivant :*

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 = 2k \\ \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 = D, \end{cases}$$

où les Y_i *sont deux racines du polynôme* $DY^2 - Y + D = 0$ *et où* Z_i *est défini par* $Z_i = Y_i/(1 + Y_i^2)$. *Ce système de trois équations et deux inconnues n'est en fait pas surdéterminé. En effet, puisque le produit des racines* $Y_1 Y_2$ *vaut* 1 *et que la somme* $Y_1 + Y_2$ *vaut* $1/D$, *la dernière équation du système est en fait équivalente à la première. On montre donc facilement que, dès que les deux racines* Y_1 *et* Y_2 *sont distinctes (c'est-à-dire lorsque* $|D| < 1/2$*), le système admet une solution* (μ_1, μ_2) *donnée par*

$$\mu_1 = \frac{Y_2 - 2k}{Y_2 - Y_1}, \quad \mu_2 = \frac{2k - Y_1}{Y_2 - Y_1}.$$

Cette solution est positive, ou plus exactement a ses deux composantes dans $\mathbb{R}^+$ *si* $2k$ *est situé entre les deux racines. On retrouve donc un résultat semblable au cas* $r < 1$, *si ce n'est qu'il n'y a que deux pentes possibles pour le profil de la vitesse.*

1.1.2 Validation numérique

On illustre dans ce paragraphe les trois résultats énoncé dans la proposition VII.1.1.

Les deux premiers tests présentés (figure VII.1.5) confirment le premier point. On considère un fluide initialement au repos. Et on montre comment évolue le profil de vitesse au cours du temps. Les nombres de Reynolds, de Peclet ainsi que le nombre capillaire sont identiques pour les deux fluides ($\mathcal{R}e = 100$, $\mathcal{P}e = 1000$ et $\mathcal{K} = 0.01$). Le premier exemple est newtonien ($r = 0$) alors que le second est visco-élastique avec $r = 0.5$, c'est à dire $r < 8/9$.

Dans les deux cas, la solution converge vers l'unique solution stationnaire théorique. Néanmoins, la différence de vitesse de convergence est notable. On va voir par la suite que si r dépasse la valeur critique de $8/9$ alors il n'y a plus obligatoirement cette convergence numérique.

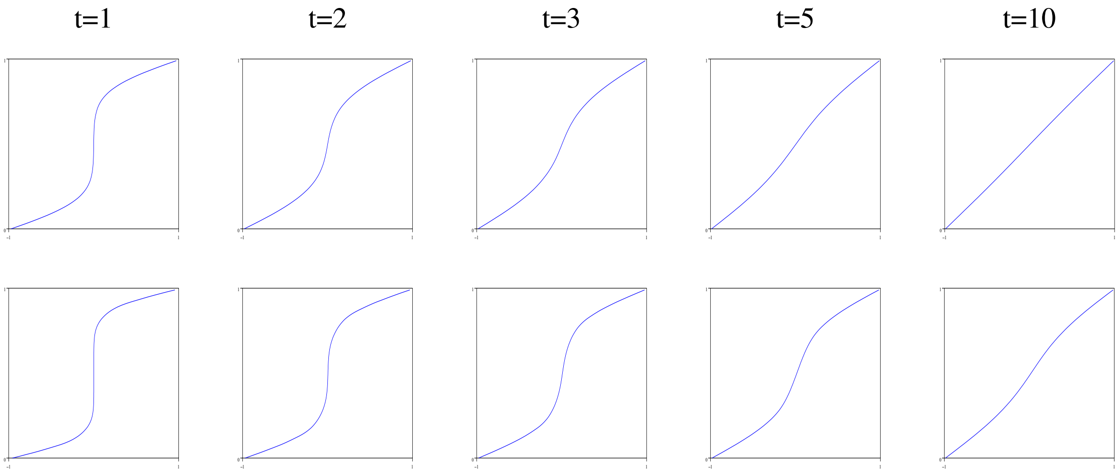


FIG. VII.1.5: Evolution en temps du profil de vitesse : cas newtonien (haut), “faiblement” élastique (bas)

Concernant la seconde assertion de la proposition VII.1.1, il faut donc tout d'abord prendre un fluide très élastique, par exemple $r = 0.9$. Et ensuite choisir k tel que $0.56 \leq k \leq 1.415$ (ce qui correspond à $K^+ < 2k < K^-$ lorsque $r = 0.9$). On a donc réalisé un essai numérique correspondant à cette plage de paramètres :

$$r = 0.9, \quad \mathcal{W}e = 1, \quad a = 0 \quad (i.e.\ k = 1).$$

Les autres paramètres sont choisis comme ceux présentés dans le test précédent. La figure VII.1.6 confirme la théorie, à savoir que le profil des vitesses ne converge pas vers un profil linéaire. Il est aussi très facile d'observer les sauts de pression et de contrainte qui ont lieu aux mêmes endroits que les changements de pentes du profil des vitesses.

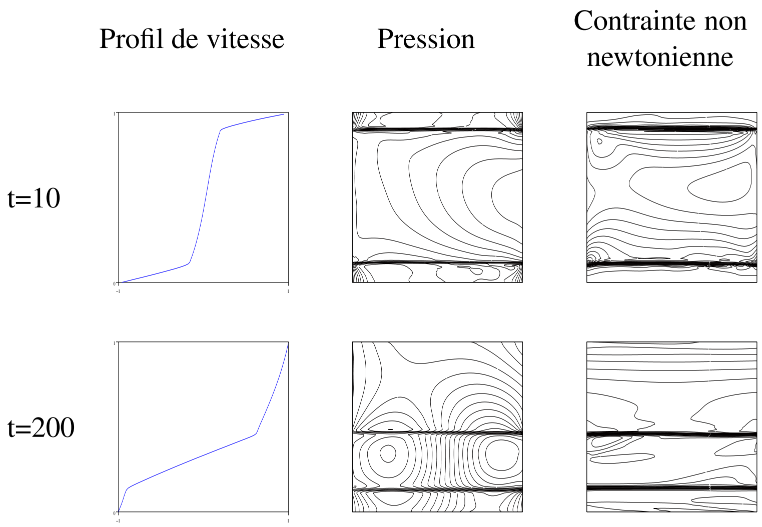


FIG. VII.1.6: Cisaillement d'un fluide visco-élastique

Il est aussi intéressant de se demander si les solutions stationnaires bidimensionnelles obtenues en théorie sont véritablement atteintes numériquement. On a vu que dans le cas d'un profil linéaire, ce régime stationnaire était très rapidement atteint. Ici, il est clair qu'à $t = 200$ la solution obtenue est loin d'être bidimensionnelle. Le profil de la pression par exemple montre que p ne dépend pas que de y au temps $t = 200$. Pour avoir confirmation qu'un régime stationnaire n'est pas atteint, on présente à la figure VII.1.7 l'évolution en temps long du profil des vitesses. Ce profil reste linéaire par morceaux mais ne converge pas.

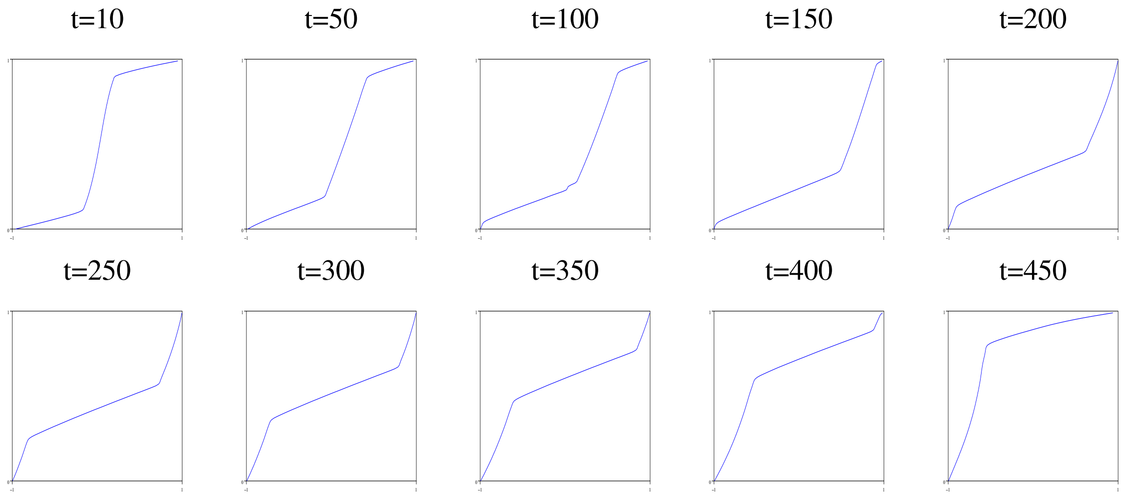


FIG. VII.1.7: Evolution en temps long du profil de vitesse dans le cas visco-élastique

Il faut noter que ce type d'instabilité élastique ne correspond pas à une instabilité due au "shear banding" déjà connue (voir par exemple [34, 68]). En effet, dans le cas de notre étude, on a montré que l'existence de profils non linéaires en la vitesse peut avoir lieu aussi bien à des petites vitesses de cisaillement qu'à de grandes vitesse alors que le phénomène de "shear banding" n'existe seulement pour des vitesses "moyennes".

On a enfin essayer de vérifier numériquement le dernier point de la proposition VII.1.1. Pour tester une instabilité, on initialise les données à $(v_N, \alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$ et on laisse évoluer le système. Lorsque $0 \leq r < 8/9$, cette solution ne change pas au cours du temps. Par contre, en choisissant les paramètres rhéologiques $r = 0.9$, $\mathcal{W}e = 1$ et $a = 0$ on se trouve alors dans le cas où la solution est théoriquement instable. Ce fait est confirmé par le résultat au temps $t = 40$, figure VII.1.8.

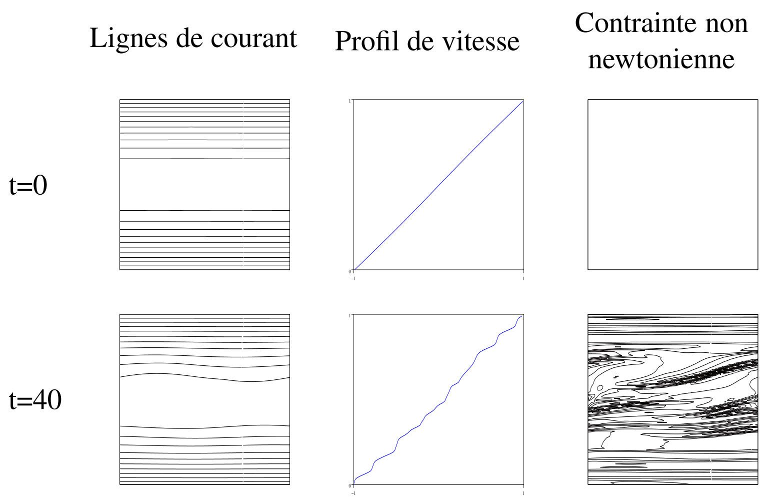


FIG. VII.1.8: Instabilité du profil de vitesse linéaire

La destabilisation du profil de vitesse est clairement mise en évidence. Une instabilité élastique (création de contrainte non newtonienne) destabilise le champ de vitesse. En particulier, le profil de vitesse devient linéaire par morceaux. Il est à noter que seules trois pentes différentes apparaissent et que $u'(y)$ possède de très nombreux point de discontinuité. Ce phénomène est dû à l'évolution relativement lente du milieu : l'étude analytique du système (VII.1.6) n'est ainsi pas très éloignée du problème d'évolution.

1.2 Cas diphasique et la décomposition spinodale

• **Mélange newtonien :** Afin d'avoir une base de comparaison, on va brièvement rappeler ce qui se passe dans le cas de la décomposition spinodale sous cisaillement de deux fluides newtoniens.

Expérimentalement, le mélange est initiallement à vitesse nulle dans un système de Couette-Taylor (figure VII.1.1) et la température est portée sous la température critique à $t = 0$ (début du cisaillement). Cette chute de température va contraindre les deux phases à se séparer. Sous l'action des vitesses imposées aux bords, chaque phase a ensuite tendance à se structurer en bandes (voir [11, 24, 69] pour les diverses expériences physiques). De plus, on sait qu'à faible vitesse de cisaillement, de tels structures lamellaires sont stables en temps long ; on se restreindra ici à de telles vitesses (voir [11] pour une étude numérique plus complète du cas newtonien à vitesse de cisaillement élevé).

• **Mélange visco-élastique :** Au vue des résultats monophasiques, il est naturel de penser que la visco-élasticité des deux phases, ou même d'une seule des deux phases, peut énormement influencer le comportement du mélange sous cisaillement.

Dans cette partie, on effectue donc des tests de cisaillement en prenant deux fluides visco-élastiques différents (de temps de retard r_1 et r_2 et de nombre de Weissenberg $\mathcal{W}e_1$ et $\mathcal{W}e_2$). Quelques résultats mathématiques dans ce cadre ont été démontrés par H. Le Meur [55]. Il établi aussi bien des théorèmes d'existence de solutions stationnaires, que des résultats concernant leur stabilité linéaire. En particulier, il prouve que lorsque les deux paramètres de retard r_1 et r_2 sont plus petits que $8/9$, le comportement est semblable au cas newtonien : il y a unicité de la solution, qui est linéaire par morceaux en la vitesse (le tenseur des contraintes s'exprimant directement à l'aide de la vitesse). Chaque "bande" de fluide ayant sa propre valeur de contrainte. Par contre, dans le cas où l'un des paramètres de retard est supérieur à $8/9$, il montre qu'il n'y a pas toujours unicité (ceci est bien sûr à rapprocher du résultat monophasique !).

• **Applications numériques :** La condition initiale est choisie au hasard autour de $\varphi = 0$ de sorte que l'on ne soit pas dans une zone de métastabilité du potentiel (ici on a choisi $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ comme potentiel). Afin de permettre une comparaison, dans tous les essais qui suivent, cette condition initiale sera toujours la même.

On présente en parallèle les résultats d'un mélange de deux fluides newtoniens et ceux d'un mélange newtonien/visco-élastique. Les paramètres rhéologiques du fluide visco-élastique (en foncé sur le bas de la figure VII.1.9) sont $r = 0.9$, $\mathcal{W}e = 10$ et $a = 0$.

Même si en temps long, le phénomène de structuration par bandes persiste, plusieurs différences sont notables. Tout d'abord le temps caractéristique d'apparition des bandes est plus long dans le cas non newtonien. D'autre part, les bandes sont beaucoup plus larges dans le cas visco-élastique. Bien entendu, les vitesses de cisaillement sont les mêmes dans les deux tests : la topologie et le nombre de bandes dépendent donc fortement de l'élasticité et de la viscosité.

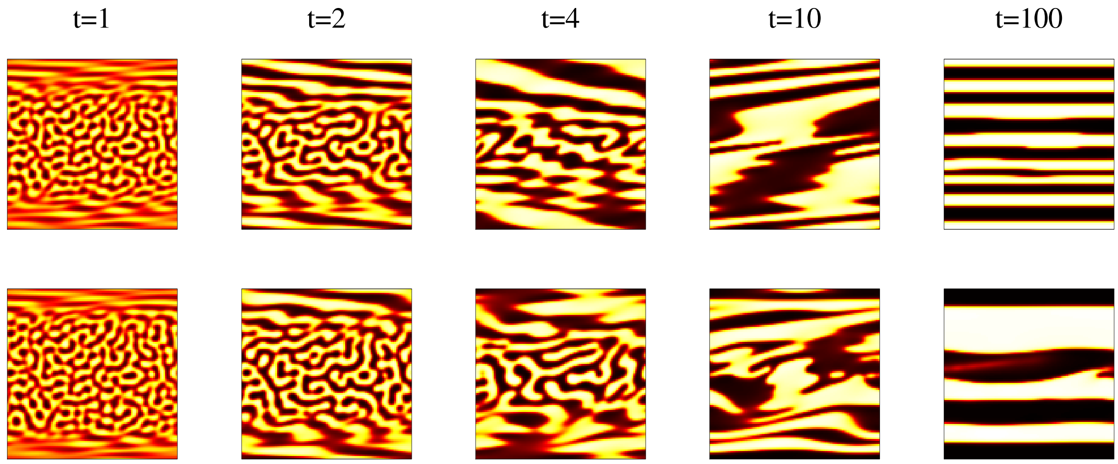


FIG. VII.1.9: Décomposition spinodale sous cisaillement : mélange newtonien (haut), visco-élastique/newtonien (bas)

Pour ce qui est des profils de vitesse, là encore, comme dans le cas monophasique, ils sont non linéaires pour des fluides visco-élastiques. Néanmoins, on remarque une correspondance entre les discontinuités de pente et les changements de phase (figure VII.1.10). Une étude de ce phénomène est détaillée dans [55].

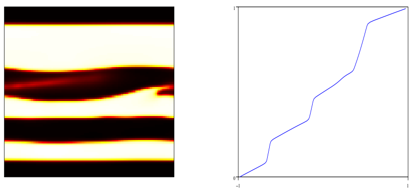


FIG. VII.1.10: Composition et profil de vitesse pour un mélange newtonien/visco-élastique en cisaillement au temps $t = 100$

2 Etirements de fibres

Les expérimentations physiques de cette partie ont été réalisées par A. Colin et O. Greffier au Centre de Recherche Paul Pascal (Bordeaux). L'expérience physique consiste à injecter un fluide dans un autre à l'aide d'une buse tout en tirant cette buse vers l'arrière (voir figure VII.2.1).

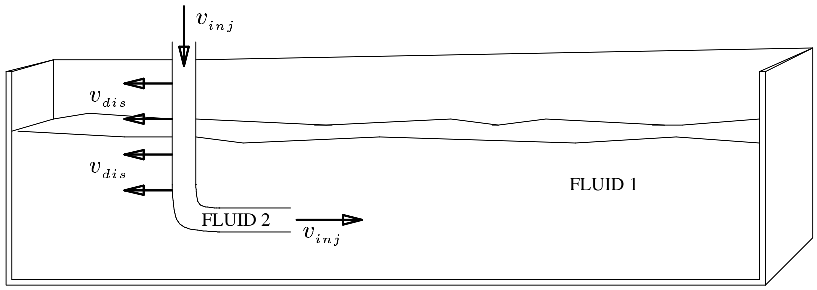


FIG. VII.2.1: Processus expérimental

L'expérience a lieu essentiellement dans le plan horizontal de déplacement de la buse (la profondeur du bassin étant négligeable devant les autres tailles caractéristiques). En particulier, les deux fluides ayant des densités voisines, on négligera la gravité. Par ailleurs, il est clair que deux vitesses caractérisent l'écoulement, d'une part la vitesse à laquelle est injecté le fluide, d'autre part la vitesse de déplacement de la buse.

FIG. VII.2.2: Dispositif expérimental, photo : C.R.P.P., voir [24]

Dans cette situation, les viscosités des fluides en présence ont une grande influence sur l'écoulement : taille des gouttes, largeur des filaments, ect. Dans les situations physiques rencontrées [24, 28], le fluide injecté est généralement 10 fois plus visqueux que l'autre fluide. C'est donc ce rapport de viscosité que nous avons choisi dans les simulations numériques présentées ici.

Décrivons tout d'abord ce qui est observé expérimentalement. Les tests ont été réalisés au C.R.P.P. par A. Colin et O. Greffier avec des fluides newtoniens. Deux cas de figure se sont dégagés : soit le jet se brise en gouttelettes, soit le jet produit un long filament. Les deux modes obtenus dépendent uniquement des deux vitesses imposées, la vitesse d'injection notée v_{inj} et la vitesse de déplacement de la buse, v_{dis}. L'apparition de ces deux régimes peut être résumé dans un diagramme de phase. Plus précisement, ils ont montré expérimentalement l'existence d'une droite dans le plan des vitesses $(v_{\text{inj}}, v_{\text{dis}})$ séparant les deux modes (fig. VII.2.3).

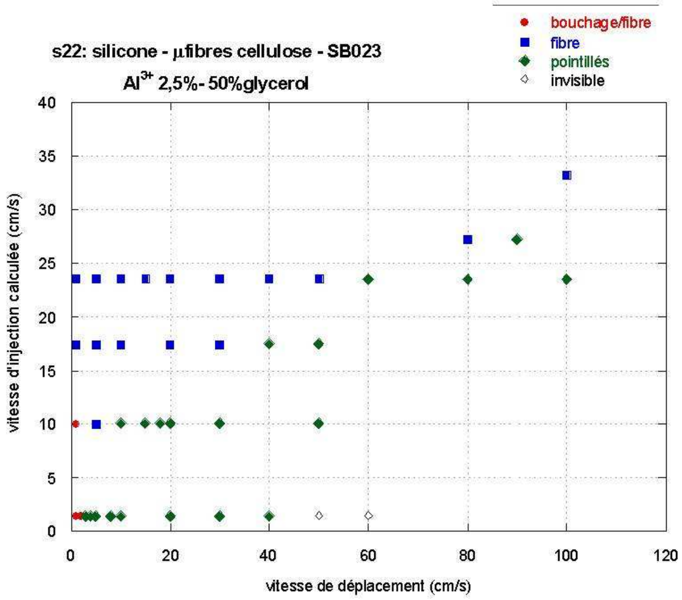
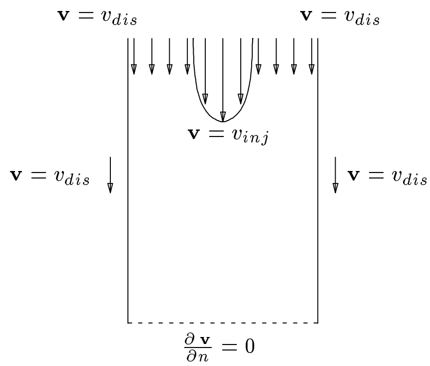


FIG. VII.2.3: Diagramme de phase obtenu expérimentalement, voir [24]



Pour simuler cette expérience, on se place dans le référentiel de la buse de sorte que l'on peut imposer les conditions aux bords décrites par la figure ci-contre. Les paramètres physiques ont été choisis en accord avec A. Colin [24] :

$$\mathcal{R}e = 100,\ \mathcal{K} = 0.001,\ \mathcal{P}e = 10,$$
$$\mathcal{W}e = 1,\ r = 0.95,\ a = 0,\ \text{ pour les fluides non newtoniens.}$$

En ce qui concerne le cas newtonien (lorsque les deux fluides sont newtoniens) le diagramme de phase que nous avons trouvé est similaire à celui déterminé par les expérimentations physiques (schéma de gauche de la figure VII.2.5). On distingue nettement le mode continu obtenu par exemple pour le jeu de vitesse $v_{\text{inj}} = v_{\text{dis}} = 1$ et le mode pointillé obtenu pour $v_{\text{inj}} = 1$, $v_{\text{dis}} = 1.25$ (figure VII.2.4).

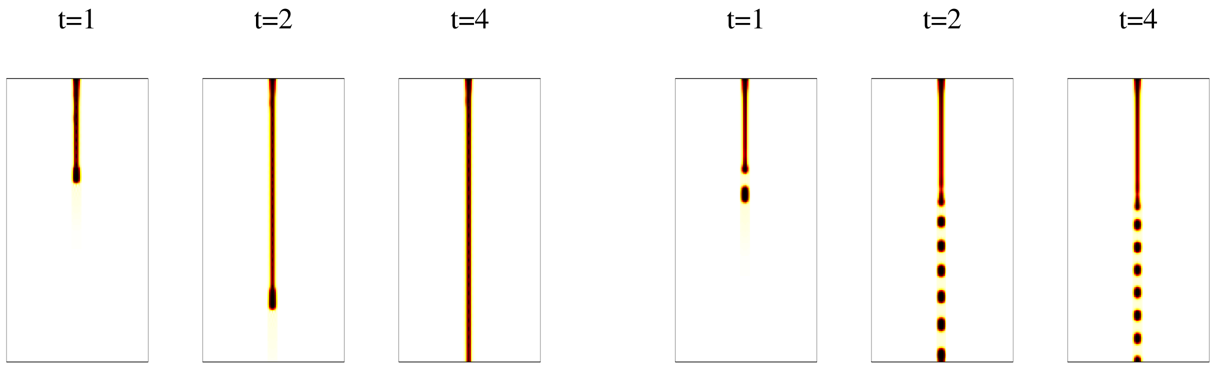


FIG. VII.2.4: Exemple des deux modes obtenus dans le cas newtonien : continu à gauche et pointillé à droite

Nous comparons ici ce diagramme de phase avec celui obtenu numériquement pour des fluides visco-élastiques (figure VII.2.5). Bien que l'on retrouve les deux modes attendus (continu et pointillé), de nombreuses différences sont visibles : en particulier la droite séparant les deux modes n'a pas la même pente (proche de 0.8 dans le cas newtonien, et proche de 0.5 dans le cas visco-élastique).

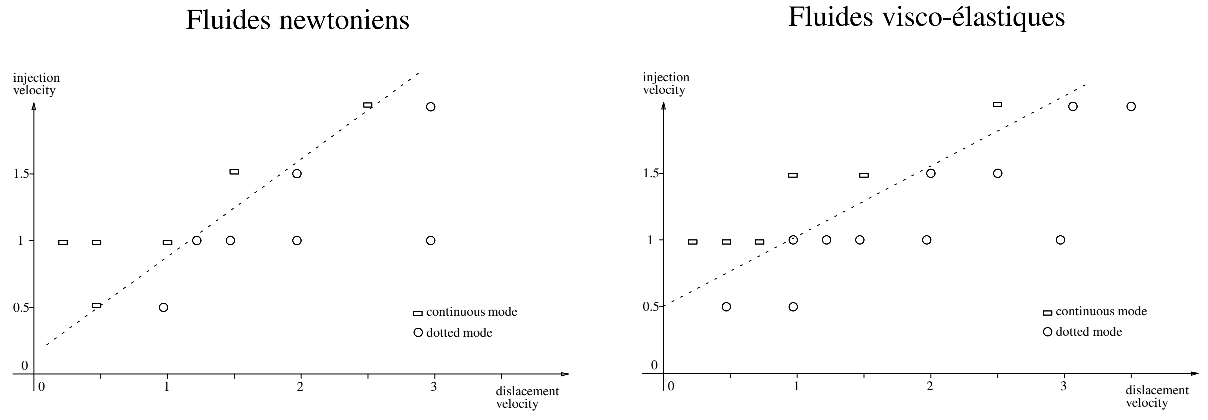


FIG. VII.2.5: Diagrammes de phase obtenus numériquement : newtonien (gauche) et visco-élastique (droite)

Si le diagramme de phase représente bien la situation globale, il est aussi intéressant d'observer les différences tolologiques entre les injections de fluides newtoniens et celles de fluides visco-élastiques.

• Autant dans le cas newtonien, lorsque le jet se brise en goutelettes, les gouttes sont régulières, autant ce n'est plus du tout le cas pour un jet visco-élastique. L'exemple de la figure VII.2.6 illustre ceci (à comparer avec la figure VII.2.4).

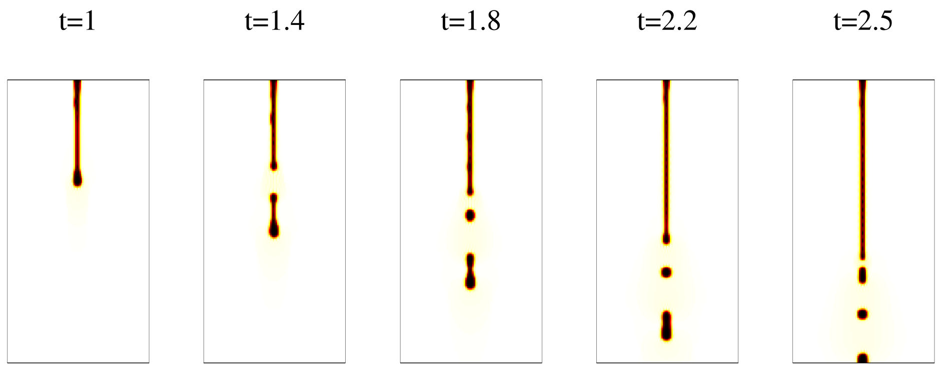


FIG. VII.2.6: Comportement d'un jet pour $v_{\text{inj}} = v_{\text{dis}} = 1$: cas visco-élastique

• L'apparition d'instabilités de Rayleigh à des vitesses relativements petites : de telles instabilités ont été observées plus facilement lorsque la taille de la buse était plus grande. A vitesse d'injection fixée $v_{\text{inj}} = 1$, cette instabilité à lieu pour des fluides visco-élastiques dès que v_{dis} dépasse 3 alors que dans le cas newtonien, il faut que v_{dis} soit supérieure à 5 (figure VII.2.7). Ceci peut s'expliquer de la façon suivante : on sait que de telles instabilités ont lieu pour des grands nombres de Reynolds et à relativement grande vitesse. Ici, bien entendu le nombre de Reynolds est le même dans les deux tests mais en imposant à un fluide d'être non newtonien, on change aussi sa viscosité (elle est multipliée par $1 - r$). On change donc artificiellement $\mathcal{R}e = (\bar{\rho}\bar{v}\bar{L})/\bar{\eta}$.

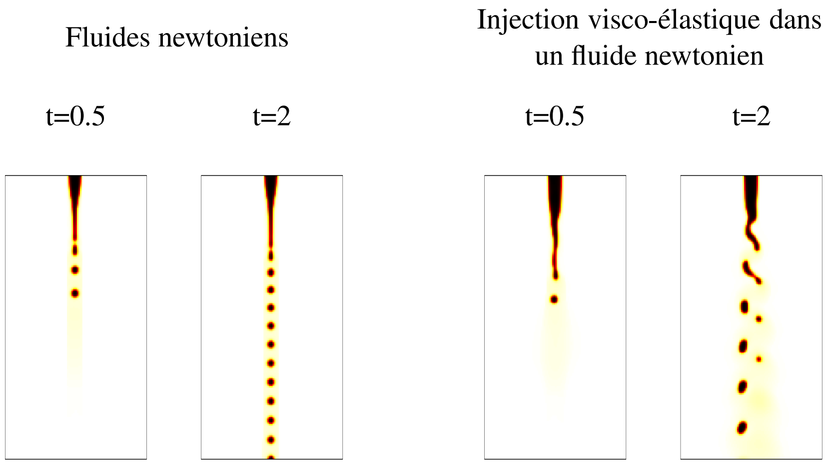


FIG. VII.2.7: Instabilité à “grande” vitesse : $v_{\text{inj}} = 1$ et $v_{\text{dis}} = 4.5$

• D’autres aspects dus aux effets visco-élastiques ont été observés, par exemple la différence de forme du jet à la sortie de la buse dans le cas newtonien et dans le cas visco-élastique. Une étude complète de cette différence dans le cas d’injection simple ($v_{\text{dis}} = 0$) est réalisée dans [49]. Schématiquement, les sorties de jet peuvent être très différentes selon la visco-élasticité (et la vitesse d’injection) du fluide, voir les schémas VII.2.8. Des différences du même type sont nettement visibles sur les essais précédents, figure VII.2.7.

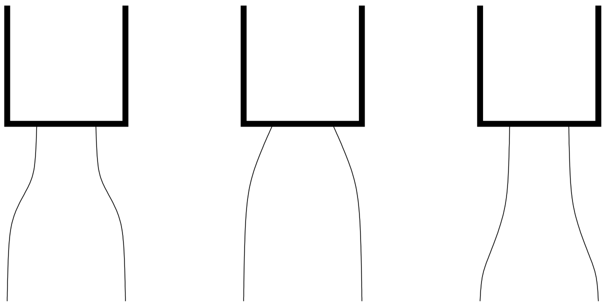


FIG. VII.2.8: Trois exemples de sortie de jet simple ($v_{dis} = 0$)

3 Remplissage de cuve

Dans l’industrie du moulage, les polymères utilisés ont fréquemment des propriétés visco-élastiques. Il est donc important de connaître leur comportement et en particulier de savoir si aprés avoir effectué un moulage, il reste des bulles d’air dans la pièce obtenue. L’intéret des simulations qui suivent est de pouvoir observer les influences *a priori* de tel ou tel paramètre sur l’éventuelle formation de cavités.

Un fluide (en noir dans les tests présentés) est injecté dans une cuve contenant initialement l’autre fluide (blanc). La gravité est ici prise en compte et le fluide injecté est 1000 fois plus dense que l’autre fluide (rapport eau/air). On remplit la cuve jusqu’au trois cinquièmes avant d’arrêter l’injection et d’observer la stabilisation.

Plusieurs tests ont été réalisés : newtonien ou visco-élastique. Les premiers résultats que l’on présente ici (figures VII.3.1 et VII.3.2) correspondent respectivement au cas newtonien et totalement visco-élastique (dans ce dernier cas, les deux fluides ont des propriétés d'élasticités), la vitesse d'injection est égale à 3 (nous stoppons donc le jet au temps $t = 6$). Dans le cas non newtonien, de plus nombreuses bulles sont formées ce qui perturbe la stabilisation. Ce phénomène est bien connu des physisiens et est la cause de très nombreux problèmes dans l'industrie.

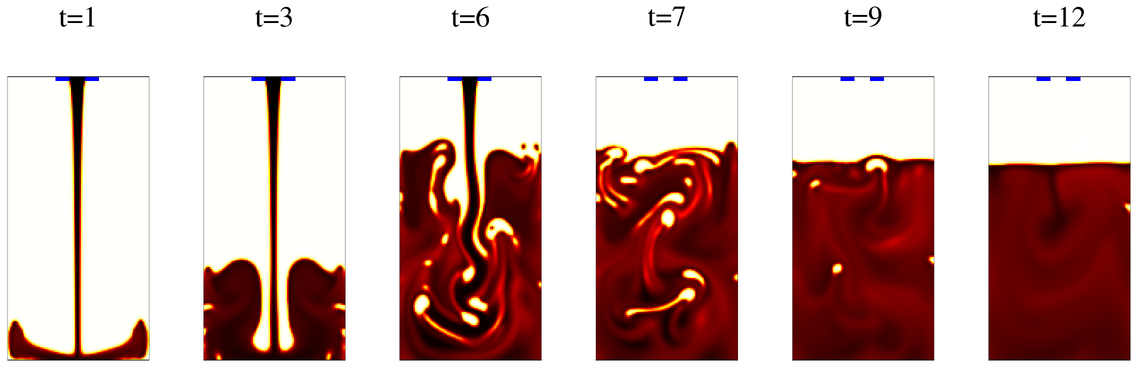


FIG. VII.3.1: Remplissage de cuve : cas newtonien

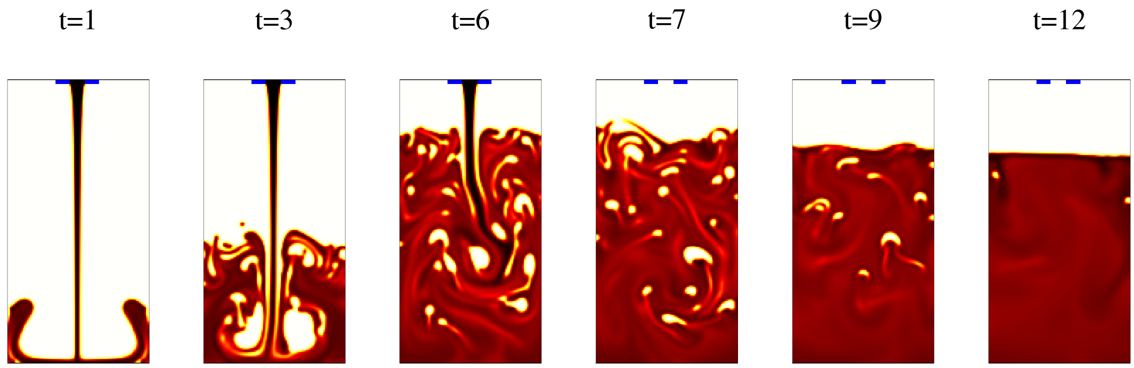


FIG. VII.3.2: Remplissage de cuve : cas visco-élastique

Lorsque la vitesse d'injection est plus faible ($v_{\text{inj}} = 1$), on a mis en évidence l'infuence du nombre de Weissenberg sur le remplissage d'une cuve. On remplit une cuve contenant initialement un fluide newtonien (en blanc sur les figures page suivante) à l'aide d'un fluide plus ou moins élastique. Cette élasticité étant déterminée par le nombre de Weissenberg. Dans les quatre tests que l'on expose ici, le premier est newtonien et sert de base de comparaison, les trois suivants sont visco-élastiques avec les paramètres d'élasticité suivants

$$\text{test } 2 \ : \ \mathcal{W}e = 0.1, \qquad \text{test } 3 \ : \ \mathcal{W}e = 1, \qquad \text{test } 4 \ : \ \mathcal{W}e = 2.$$

Dans les trois cas visco-élastiques, on a choisit $a = 0.8$ ce qui correspond aux comportements généralement adoptés (voir [78]). Le paramètre de retard vaut $r = 0.8$. Pour ce qui est des autres paramètres, ils sont identiques dans toutes les expériences :

$$\mathcal{R}e = 100, \quad \mathcal{K} = 0.1, \quad \mathcal{P}e = 1000, \quad \rho_1 = 0.001,\ \rho_2 = 1, \quad \eta_1 = 1,\ \eta_2 = 10.$$

De nombreuses différences de comportement sont remarquables : tout d'abord la différence du comportement de l'injection elle-même (épaiseur du jet d'autant plus grande que le fluide est visco-élastique). Ensuite on peut noter que le remplissage proprement dit se rapproche de plus en plus d'un comportement solide lorsque le nombre de Weissenberg devient grand (forme d'un tas de sable). Et enfin, le jet étant stoppé au temps $t = 18$ et la stabilisation observée au temps $t = 36$ met en évidence l'existence ou non de bulles au sein du mélange.

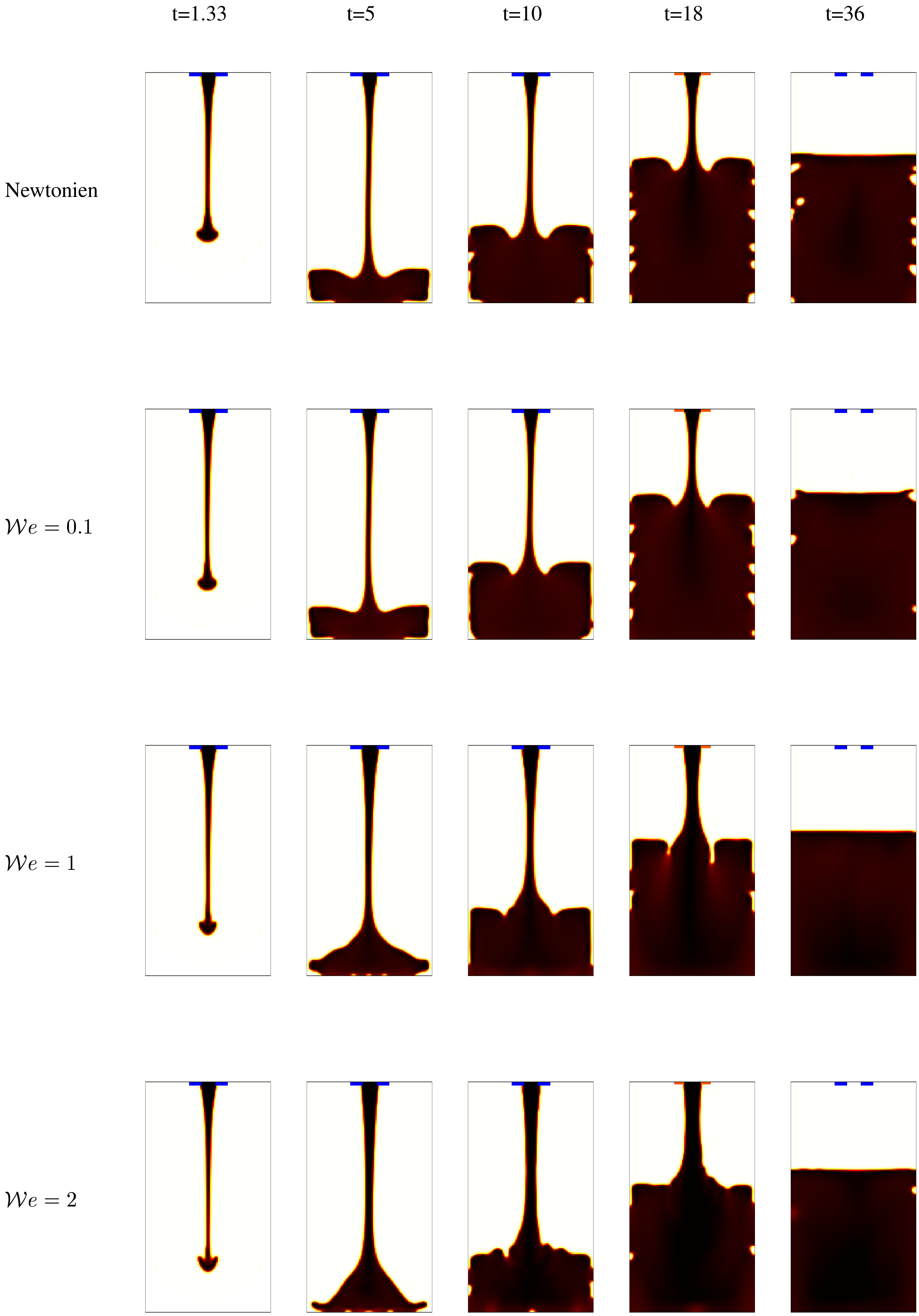


FIG. VII.3.3: Remplissage de cuve : comportement topologique en fonction du nombre de Weissenberg

Conclusion et perspectives

Conclusion

Au cours de ces travaux on a proposé un modèle physique décrivant l'évolution des mélanges de deux fluides non newtoniens. On a ensuite effectué une étude théorique, numérique et qualitative de ce modèle. Les expérimentations numériques effectuées attestent de la pertinence du modèle.

Au cours de la première partie, on s'est interessé à la mise en place d'un modèle pour l'étude des écoulements diphasiques visco-élastiques.

Au delà des équations de Navier-Stokes gérant les propriétés hydrodynamiques d'un fluide, on a exprimé d'une part le caractère diphasique du milieu en faisant intervenir un paramètre d'ordre (fraction volumique d'une phase dans le mélange) et en prenant en compte les théories de Cahn et Hilliard sur les interactions thermodynamiques entre les deux phases, d'autre part l'effet visco-élastique grâce à une loi comportementale de type Oldroyd.

Ces trois phénomènes (écoulement, diphasique et viscoélastique) sont fortement couplés. Tout d'abord, la vitesse moyenne du mélange agit sur l'interface par l'intermédaire du transport du paramètre d'ordre. La thermodynamique de l'interface engendre un terme de force de tension de surface dans les équations de Navier-Stokes *via* les lois fondamentales de la mécanique. Ensuite, la prise en compte du caractère non-newtonien engendre elle aussi l'apparition d'un terme supplémentaire aux lois de conservation de la quantité de mouvement : l'effet visco-élastique revient à ajouter des forces intérieures de contrainte. Ces forces de contrainte vérifient une loi d'Oldroyd exprimant le fait que le fluide possède une mémoire. Enfin, les temps caractéristiques mesurant cet effet mémoire dépendent de la composition du mélange et sont eux même naturellement couplés à la loi d'évolution du paramètre d'ordre.

Au cours de la seconde partie, on a étudié les propriétes mathématiques du modèle. Afin de se concentrer sur le caractère visco-élastique, on s'est placé dans le cas où la mobilité est non dégénérée, le potentiel non singulier et où les deux phases ont même densité.

On a commencé par montrer des résultats d'existence et d'unicité en présence de diffusion en contrainte. Dans ce premier cas, les méthodes sont proches de celles utilisées dans le cadre newtonien. Suivant le choix de la dérivée objective et de la dimension de l'étude (2 ou 3), on a obtenu des résultats d'existence faible ou forte, locale ou globale.

On a ensuite obtenu certains résultats pour un modèle sans diffusion de la contrainte. La démarche a été différente et les techniques fondées sur les travaux concernant les modèles monophasiques. Au cours de ses travaux, des estimations d'énergie originales ont permis d'obtenir un résultat d'existence globale à données petites, sans supposer que le fluide soit peu visco-élastique. Ce dernier résultat n'était jusqu'alors pas connu, même dans le cas monophasique.

Enfin, il a paru intéressant de savoir si la présence ou non de viscosité en contrainte, aussi petite soit-elle, avait une influence sur le résultat. On montre que lorsque la diffusion en contrainte devient petite, il se crée une couche limite au bord du domaine, mais qu'à l'intérieur du domaine d'étude, la solution converge bien vers la solution sans diffusion en contrainte. Plus exactement, on a montré qu'une couche limite se crée au premier ordre sur la contrainte alors qu'elle n'apparait qu'au second ordre sur la vitesse. De plus, concernant cette couche limite en vitesse, elle n'est présente que sur la composante tangentielle de la vitesse.

Dans la dernière partie, on a validé qualitativement le modèle *via* la mise en place d'un schéma numérique.

On a apporté un soin particulier à la discrétisation des termes de transport, aussi bien dans l'équation sur le paramètre d'ordre que dans les équations de Navier-Stokes et la loi d'Oldroyd. Le schéma choisi pour discrétiser ce terme est un schéma de Runge-Kutta en temps, antidiffusé en espace de façon à garder une propriété de positivité (afin d'assurer la conservation de la composition du mélange au cours du temps par exemple). Une discrétisation originale de la loi de type Oldroyd permet de suivre correctement l'évolution du tenseur des contraintes. Cette discrétisation a été réalisée de façon à pouvoir être utilisée dans des situations physiques variées. Ainsi, on peut traiter aussi bien les cas où les deux phases sont visco-élastiques, que les cas où l'une des deux phases est newtonienne.

Après avoir montré des propriétés de stabilité du schéma numérique, on a réalisé plusieurs applications proches de contextes physiques bien précis.

On a tout d'abord observé le comportement des fluides complexes sous cisaillement. Dans le cas monophasique, des différences comportementales entre fluides newtoniens et visco-élastiques ont été clairement mis en évidence. Des instabilités, même à faible cisaillement, ont été observées. Dans le cas diphasique, on a comparé les décompositions spinodales obtenues avec des fluides newtoniens et celles obtenues avec des fluides non newtoniens. Le caractère visco-élastique réduit la formation de bande lors du cisaillement au point de ne plus observer aucune stratification, même en temps long.

Ensuite, des étirements de fibres ont été réalisés à la fois numériquement et expérimentalement. Ces tests ont permi de comparer le code numérique et les comportements réels des fluides, et ainsi de valider le modèle. Enfin, on a réalisé des tests de remplissage de cuve mettant encore une fois l'accent sur les propriétés d'instabilité des fluides complexes dont font partie les fluides visco-élastiques. Des différences de formation de bulles au sein du mélange ont ainsi été mises en évidence.

Perspectives

A la suite de cette étude, de nombreuses questions peuvent être posées. Tout d'abord au sujet du modèle considéré. Peut-on l'étendre à des situations plus générales ?

On peut d'ores et déjà penser à des modèles triphasiques visco-élastiques en étendant l'énergie de Cahn-Hilliard aux cas des systèmes (voir [60, 66]). Il va sans dire que de tels travaux pourraient aboutir à de nombreuses applications. Concernant la loi constitutive pour la contrainte, il existe de nombreux autres modèles pour des fluides visco-élastiques qui peuvent être facilement adaptés (modèles de Giesekus, Phan-Thien et Tanner... décrits dans le second chapitre). D'autres modèles sont aussi connus pour être plus proche de certains fluides complexes. C'est le cas des modèles de type F.E.N.E. étudiés par R. Keunings [51, 52], H.C. Öttinger [70]... mais ils sont assez différents du modèle étudié au cours de ces travaux.

Concernant la partie théorique de cette thèse, il serait évidemment très intéressant de pouvoir montrer des résultats mathématiques pour des mélanges non homogènes. On a déjà signalé que des travaux existaient à ce sujet (voir [11]) mais ces résultats ne couvrent pas les cas où les deux phases ont des densités éloignées, comme c'est souvent le cas physiquement (le rapport des densités dans un mélange eau/air est de 1000).

Bien entendu, du point de vue théorique, de nombreuses questions restent encore ouvertes au sujet des fluides visco-élastiques, ne serait-ce monophasiques. Des cas simplifiés mais répondant néanmoins à des besoins physiques peuvent être envisagés. On peut par exemple penser à tout ce qui touche la micro-fluidique, la médecine et la circulation sanguine : en se plaçant dans des domaines minces (micro-canaux ou artères), les équations peuvent dégénérer et on peut alors espérer obtenir plus de résultats. Des travaux en collaboration avec Thierry Colin et Iraj Mortazavi sont actuellement en cours sur ce sujet.

Enfin, concernant l'étude numérique qui a été menée, il est évident qu'un passage à un code tridimensionnel permettrait d'observer une variété plus large de phénomènes physiques, en particulier pour des remplissage de cuve avec coins, des créations de rouleaux dans une cellule de Couette...

Bibliographie

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press, New York (1975)

[2] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand mathematical studies 2 (1965)

[3] P. Angot, C.H. Bruneau, P. Fabrie, *A penalisation method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math., 81, pp 497-520 (1999)

[4] H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters, *An introduction to Rheology*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam (1989)

[5] H.W. Barrett, J.F. Blowey, *Finite elements approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility*, Mathematics of Computation, 68, pp 487-517 (1999)

[6] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF (1987)

[7] J.P. Bourgignon, H. Brezis, *Remarks on the Euler Equation*, J. Funct. Anal. 15, pp 341-363 (1974)

[8] F. Boyer, *Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation*, Asymptotic Analysis, Vol. 20 n.2, pp 175-212 (1999)

[9] F. Boyer, *A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows*, Computers and Fluids Vol. 31 no 1 (2002)

[10] F. Boyer, *Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids*, à paraitre dans Annales de l'IMP : Analyse nonlinéaire (1999)

[11] F. Boyer, *Ecoulements diphasiques de type Cahn-Hilliard*, Thèse de Doctorat, MAB, Université Bordeaux 1 (2001)

[12] F. Boyer, L. Chupin, P. Fabrie, *Numerical study of viscoelastic mixtures through a Cahn-Hilliard flow model*, soumis à European Journal of Mechanics, B-fluids.

[13] F. Boyer, P. Fabrie, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, en préparation

[14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson (1983)

[15] C.H. Bruneau, P. Fabrie, P. Rasetarinera, *An accurate finite difference scheme for solving convection-dominated diffusion equations*, Internat. J. Num. Methods Fluids, Vol 24, pp 169-183 (1997)

[16] J.W. Cahn, *On spinodal decomposition*, Acta. Metall., 9, pp 795-801 (1961)

[17] J.W. Cahn, J.E. Hilliard, *Free energy of non-uniform system. I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys. 28, pp 258-267 (1958)

[18] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Commun. Partial Differ. Equations, vol. 27, 7-8, pp 1467-1495 (2002)

[19] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31, pp 308-340 (1961)

[20] R. Chella, J. Vinals, *Mixing of two-phase fluids by a cavity flow*, Physical Review E 53, pp 3832-3840 (1996)

[21] J.Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E.Grenier, *Ekman boundary layers in rotating fluids*, A tribute to J. L. Lions, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8, pp 441-466 (2002)

[22] L. Chupin, *Existence result for a mixture of non Newtonian flows with stress diffusion using the Cahn-Hilliard formulation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, vol. 3, 1 , pp 45-68 (2003)

[23] L. Chupin, *Some theoritical results concerning diphasic viscoelastic flows of the Oldroyd kind*, en préparation

[24] A. Colin (Centre de Recherche Paul Pascal), Communications personnelles

[25] P. Constantin, C. Foias, *Navier-Stokes Equations*, University of Chicago Press (1989)

[26] Y. Demay, C. Jouron, J.C. Saut, *Calculs d'écoulements visco-élastiques pour la mise en forme des polymères*, Optimisation et controle (Sophia-Antipolis) Cépaduès Toulouse, pp 113-131 (1992)

[27] M. Doi, *Dynamics of domains and textures*, Theoretical Challenges in the dynamics of complex fluids, pp 293-314 (1997)

[28] J. Eggers, *Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows*, Rev. of Mod. Physics, Vol.60, No.3, pp 865-929 (1997)

[29] A.W. El-Kareh, L.G. Leal, *Existence of solutions for all Deborah numbers for a non-Newtonian model modified to include diffusion*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 33, No.3, pp 257-287 (1989)

[30] C. M. Elliott, H. Garcke, *On the Cahn-Hilliard Equation with degenerate mobility*, Siam J. Math. Anal. 27, n 1 , pp 404-423 (1996)

[31] P. Fabrie, *Contribution à l'étude de la convection naturelle en milieu poreux*, Thèse d'état, Université Bordeaux 1 (1987)

[32] E. Fernandez-Cara, F. Guillen, R.R. Ortega, *Some Theoritical Results Concerning Non Newtonian Fluids of the Oldroyd Kind*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), vol XXVI, pp 1-29 (1998)

[33] E. Fernandez-Cara, F. Guillen, R.R. Ortega, *Existence et unicité de solution forte locale en temps pour des fluides non newtoniens de type Oldroyd (version L^s - L^r)*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, I, pp 411-416 (1994)

[34] S.M. Fielding, P.D. Olmsted, *Flow phase diagrams for concentration-coupled shear banding*, Eur. Phys. J. E 11, pp 65-83 (2003)

[35] M. Fortin, R. Glowinski, *Augmented lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems*, Vol 15 of Studies in Mathematics and its applications. North-Holland Publishing Comp. (1983)

[36] P. Germain, *Cours de mécanique des milieux continus*, Tome 1, Masson (1973)

[37] H. Giesekus, *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility*, J. non-Newtonian Fluid Mech., 11, pp 69-109 (1982)

[38] E. Godlewski, P.A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Marketing Editions (1991)

[39] E. Grenier, O. Guès, *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems*, Journal of Differential Equations, 143, pp 110-146 (1998)

[40] A. Groisman, V.Steinberg, Phys. Fluids 10, pp 2451 (1998)

[41] A.Groisman, V.Steinberg, Nature, Vol. 405, pp 53-55 (2000)

[42] O. Guès, *Perturbations visqueuses de problèmes hyperboliques et couches limites*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 45, 4, pp 973-1006 (1995)

[43] C. Guillopé, J.C. Saut, *Résultats d'existence pour des fluides viscoélastiques à la loi de comportement de type différentiel*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.305, Série I, pp 489-492 (1987)

[44] C. Guillopé, J.C. Saut, *Existence Results for the Flow of viscoelastic Fluids with a differential*, Nonlinear Analysis, Vol. 15 n.9, pp 849-869 (1990)

[45] C. Guillopé, J.C. Saut, *Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type*, Rairo model Math. Anal. Num., Vol. 24 n.3, pp 369-401 (1990)

[46] J.D. Guton, M. San Miguel, P.S. Sahni, *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 8, ed. by Domb and Lebowitz (Academic, London) (1983)

[47] C.O. Horgan, *Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics*, SIAM Review 37 No. 4, pp 491-511 (1995)

[48] L. Hörmander, *Progress in Nonlinear Differential Equation and their Applications*, 21, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA (1996)

[49] D. D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Springer (1990)

[50] D. D. Joseph, M. Renardy, J.C. Saut , Arch. Rat. Mech. Anal., 87, pp 213-251 (1985)

[51] R. Keunings, *Computer Modeling for Polymer Processing*, C.L.Tucker III, Hanser Publishers (1989)

[52] R. Keunings, *Macroscopic Simulations with Differential Constitutive Equations*, Ecole CEA-EDF-INRIA, Modélisation numérique de polymères à l'échelle mésoscopique, INRIA Rocquencourt, 13-16 novembre (2000)

[53] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach (1969)

[54] R.G. Larson, T.C.B. McLeish, J. Rheol., 42, pp 81-110 (1998)

[55] H. Le Meur, *Non-uniqueness and linear stability of the one-dimensional flow of multiple viscoelastic fluids*, Math. Model. and Num. Anal., Vol. 31, 2, pp 185-212 (1997)

[56] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod (1969)

[57] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod (1968)

[58] P.L. Lions, N. Masmoudi, *Global solutions for some Oldroyd models of non Newtonian flows*, Chin. Ann. Math., Ser. B 21, 2, pp 131-146 (2000)

[59] J.S. Lowengrub, L. Truskinovsky, *Quasi-incompressible Cahn-Hilliard fluids and topological transitions*, Proc. Royal Soc. of London, Serie A, vol. 454, pp 2617-2654 (1998)

[60] S. Maier-Paape, B. Stoth, T. Wanner, *Spinodal decomposition for multicomponent Cahn-Hilliard systems*, J. Statist. Phys. 98 , no. 3-4, pp 871-896 (2000)

[61] G. Marrucci, *Dynamics of entanglements : A nonlinear model consistent with the Cox-Merz rule*, J. non-Newtonian Fluid Mech., 62, pp 279-289 (1996)

[62] Guy Métivier, Cours de D.E.A. 2002/2003, Université Bordeaux I.

[63] A. Miranville, *Upper bound on the dimension of the attractor for the shear-layer flow in space dimension* 3, In Dynamical Systems (Stockholm, 1992), pp 61-74. World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1993)

[64] L. Molinet, R. Talhouk, *On the global and periodic regular flows of viscoelastic fluids with a differential constitutive law*, à paraitre dans Nonlinear Differential Equations and Applications.

[65] S.J.Muller, R.G Larson, E.S.G Shaqfed, Rheol. Acta. 28, pp 499 (1989)

[66] A. Novick-Cohen, *Triple-junction motion for an Allen-Cahn/Cahn-Hilliard system*, Phys. D 137, no. 1-2, pp 1-24 (2000)

[67] J.G. Oldroyd, *On the formation of rheological equations of state*, Proc. R. Soc. Lond. A200, pp 523-541 (1950)

[68] P.D. Olmsted, *Two-state shear diagrams for complex fluids in shear flow*, Europhys. Letter, 48, 3, pp 339-345 (1999)

[69] A. Onuki, *Phase transitions of fluids in shear flow*, J. Phys. Condens. Matter 9, pp 6119-6157 (1997)

[70] H.C. Öttinger, *Nonequilibrium thermodynamics - a tool for applied rheologists*, Appl. Rheol., 9, pp 17-26 (1999)

[71] R.G. Owens, *Une introduction à la mécanique de fluides non-newtoniens*, Notes de cours (2002)

[72] N. Phan-Thien, R. Tanner, *A new constitutive equation derived from network theory*, J. non-Newtonian Fluid Mech., 2, pp 353-365 (1977)

[73] M. Reiner, *The Deborah number*, Physics Today, pp 17-62 (1964)

[74] M. Renardy, *Nonlinear stability of flows of Jeffreys fluids at low Weissenberg numbers*, Arch. Rational Mech. Anal. 132, pp 37-48 (1995)

[75] J.B. Salmon, A. Colin, S. Manneville, *Velocity profiles in shear-banding wormlike micelles*, J. Phys. Rev. Lett., 90, pp 228303-228307 (2003)

[76] D. Sanchez, *Boundary layer on a high-conductivity domain*, Commun. on Pure and Applied Analysis, vol. 1, 4, pp 547-564 (2002)

[77] D. Sandri, *Numerical study of a new finite element method for the approximation of viscoelastic fluid flow problem*, Preprint Lyon1 (2003)

[78] P. Saramito, *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées-applications*, Thesis, I.N.P.Grenoble (1990)

[79] L. Schwartz, *Distributions à valeurs vectorielles, I*, Annales Inst. Fourier, 7, pp 1-141 (1957)

[80] E.S.G. shaqfed, Annu. Rev. Fluid. Mech. 28 pp 129 (1996)

[81] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146, pp 65-96 (1987)

[82] M. Sussman, A.S. Almgren, J.B. Bell, P. Colella, L.H. Howell, M.L. Welcome, *An adaptative level set approach for incompressible two-phase flows*, Journal of Computational Physics, 148, pp 81-124 (1999)

[83] R. Temam, *Navier Stokes Equations*, North-Holland (1977)

[84] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematial Science 68, Springer-Verlag (1997)

[85] R. Temam, *Navier Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Regional Conference Series in Applied Mathematics (1983)

[86] K. Walters, *Overview of macroscopic viscoelastic flow*, Viscoelasticity and Rheology, Academic Press, pp 47-79 (1976)