Analyse M1 MEEF **Ch. Menini**

Devoir surveillé - jeudi 26 septembre 2013

Durée 1h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Démonstration courte

Démontrer que si une suite (u_n) converge vers un réel l strictement positif alors il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, u_n est positif.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$?

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ et la déterminer, on la notera l dans le reste de l'énoncé.

3. Montrer que $f(x) - x \geq 0$ pour tout x dans $[0, l]$, que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x dans $[l, +\infty[$.

4. Montrer que pour tous x et y réels positifs, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2\sqrt{2}}$.

Dans la suite de l'exercice on va étudier de deux manières différentes la convergence de la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

5. Première méthode :

5.1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par l si $u_0 \in [0, l]$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par l si $u_0 \in [l, +\infty[$.

5.2. Que pouvez-vous conclure concernant la convergence de la suite (u_n) ?

6. Deuxième méthode :

6.1 Montrer que pour tout entier n, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - l|$. Puis que pour tout entier n,
$|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - l|$.

6.2. Que pouvez-vous conclure concernant la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 2

1. Donner sans démonstration la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α.

2. Soit f une fonction continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$, montrer que pour tout entier $k \geq 1$

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) - f(k+1).$$

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. Démontrer à l'aide de ce qui précède, avec une fonction f bien choisie, que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge (indication : on pourra commencer par étudier sa monotonie).