Analyse M1 MEEF **Ch. Menini**

Corrigé du devoir surveillé - jeudi 26 septembre 2013

Démonstration courte

Démontrer que si une suite (u_n) converge vers un réel l strictement positif alors il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, u_n est positif.

Par définition de la convergence de la suite (u_n) vers l, en prenant $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$

$$\exists n_0 \ : \ \forall n \geq n_0, \ |u_n - l| \leq \epsilon$$

soit

$$\exists n_0 \ : \ \forall n \geq n_0, \ 0 < \frac{l}{2} \leq u_n \leq \frac{3l}{2}.$$

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1. *Quel est le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$?*

Par composition, la fonction $x \mapsto x+2$ est croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, la fonction racine est croissant sur $\mathbb{R}_+$. Ou encore la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée f' avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$.

2. *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ et la déterminer, on la notera l dans le reste de l'énoncé.*

$$f(x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2+x-x^2 = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \{-1, 2\} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$-1 < 0$ et $2 > 0$, la solution existe et est unique et $l = 2$.

3. *Montrer que $f(x) - x \geq 0$ pour tout x dans $[0, l]$, que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x dans $[l, +\infty[$.*

$$f(x) - x = \frac{(\sqrt{2+x} - x)(\sqrt{2+x} + x)}{\sqrt{2+x} + x} = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x} \quad \text{du signe de} \quad 2+x-x^2.$$

Les racines de $2+x-x^2$ sont $-1 < 0$ et $l = 2$. On en déduit que $2+x-x^2 \geq 0$ pour x dans $[0, l]$ et $2+x-x^2 \leq 0$ pour x dans $[l, +\infty[$.

4. *Montrer que pour tous x et y réels positifs, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2\sqrt{2}}$.*

$$f(x) - f(y) = \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2+y})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y})}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}} = \frac{x-y}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}}.$$

Puis en remarquant que pour x dans $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{2+x} \geq \sqrt{2}$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{2}}.$$

On pouvait aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Dans la suite de l'exercice on va étudier de deux manières différentes la convergence de la suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

5. *Première méthode :*

5.1. *Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par l si $u_0 \in [0, l]$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par l si $u_0 \in [l, +\infty[$.*

La fonction f étant croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ on sait que la suite (u_n) est monotone ; croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante si $u_1 \leq u_0$.

Si $u_0 \in [0, l]$, avec la question 3, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Si $u_0 \in [l, +\infty[$, avec la question 3, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

5.2. *Que pouvez-vous conclure concernant la convergence de la suite (u_n) ?*

Avec les variations de f et le fait que $f(l) = l$ on a de plus que $f([0, l]) \subset [0, l]$ et $f([l, +\infty[) \subset [l, +\infty[$. En conclusion si u_0 est dans $[0, l]$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par l, elle converge vers L élément de $[0, l]$;
si u_0 est dans $[l, +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante et minorée par l, elle converge vers L' élément de $[l, +\infty[$.
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$ les limites L et L' sont des réels positifs solutions de $f(x) = x$, cette solution est unique d'où $L = L' = l$.

6. *Deuxième méthode :*

6.1 *Montrer que pour tout entier n, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - l|$. Puis que pour tout entier n, $|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - l|$.*

En utilisant la question 4

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{|u_n - l|}{2\sqrt{2}}.$$

Montrons par récurrence que pour tout entier n, l'assertion (H_n) : $|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - l|$.

(H_0) est vérifiée puisque $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 = 1$.

Montrons que pour tout entier n, (H_n) implique (H_{n+1}). Avec ce qui précède

$$|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - l| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - l| \quad \text{avec } (H_n)$$

et (H_{n+1}) est vérifiée. On a montré que (H_0) est vérifiée et que pour tout entier n, (H_n) implique (H_{n+1}) ; l'assertion (H_n) est donc vérifiée pour tout entier n.

6.2. *Que pouvez-vous conclure concernant la convergence de la suite (u_n) ?*

$0 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$ donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n\right)_n$ converge vers 0 et avec l'assertion (H_n), la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 2

1. *Donner sans démonstration la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α.*

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. *Soit f une fonction continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$, montrer que pour tout entier $k \geq 1$*

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) - f(k+1).$$

f étant décroissante sur $[1, +\infty[$ et par positivité de l'intégrale on a pour tout entier $k \geq 1$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) \Rightarrow -f(k+1) \geq -\int_k^{k+1} f(t)\, dt \geq -f(k) \Rightarrow f(k) - f(k+1) \geq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\, dt \geq 0.$$

3. *Pour tout entier $n \geq 2$, on note $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. Démontrer à l'aide de ce qui précède, avec une fonction f bien choisie, que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge (indication : on pourra commencer par étudier sa monotonie).*

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$ avec la question 2 en prenant $f(x) = \frac{1}{x}$. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

En remarquant que $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt\right)$ et, toujours avec la question 2, $v_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq 1$. La suite est croissante et majorée, elle converge (on note γ sa limite, c'est la constante d'Euler).