Analyse M1 MEEF **Ch. Menini**

Devoir surveillé - jeudi 14 novembre 2013

Durée 1h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Question de cours

En rappelant les théorèmes utilisés, justifier que la fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque, notée arctan, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

1. Justifier que cette série converge.

2. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n}$?

3. On note $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n}$ pour $x \in]-R,R[$, justifier que F est dérivable sur $]-R,R[$ et donner une expression de F'.

4. Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$, $F'(x) = \frac{3}{3-x}$.

5. Calculer $F(0)$ puis $F(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.

6. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Exercice 2

1. Soit n un entier relatif, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$$

converge si et seulement si $n \geq 2$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de cette intégrale pour $n \geq 2$.